

## ■ 三支决策与人工智能专题(主持人:杨海龙)

引用格式: 徐伟华, 丁一, 邓彪, 等. 基于区间值犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2024, 52(3): 37-46. [XU W H, DING Y, DENG B, et al. Three-way decision models based on interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2024, 52(3): 37-46.] DOI: 10.15983/j.cnki.jsnu.2024008

## 基于区间值犹豫模糊多粒度 粗糙集的三支决策模型

徐伟华\*, 丁一, 邓彪, 张晓燕

(西南大学 人工智能学院, 重庆 400715)

**摘要:** 针对区间值犹豫模糊信息系统, 提出了两种基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型。首先, 借助多粒度粗糙集理论, 提出乐观和悲观区间犹豫模糊多粒度粗糙集模型。其次, 引入区间犹豫模糊连续交叉熵的概念, 用 TOPSIS 方法来计算对象在不同情况下的条件概率。基于此, 定义区间犹豫模糊决策理论粗糙集并给出相应的三支决策规则。最后, 通过实例验证了这两种模型对目标评估采取不同的态度和决策方案, 并且证明了所提算法的有效性。

**关键词:** 三支决策; 区间犹豫模糊多粒度粗糙集; 连续交叉熵; 决策理论粗糙集

**中图分类号:** TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-4291(2024)03-0037-10

### Three-way decision models based on interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set

XU Weihua\*, DING Yi, DENG Biao, ZHANG Xiaoyan

(College of Artificial Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China)

**Abstract:** In this paper, two three-way decision models based on interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set are proposed for the interval-valued hesitant fuzzy information system. First, the optimistic and pessimistic interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set models are determined by means of multi-granularity rough set theory. Then, the concept of interval valued hesitant fuzzy continuous cross-entropy is introduced to calculate the conditional probabilities under different cases through the technique for order preference by similarity to an ideal solution (TOPSIS). Based on this, interval-valued hesitant fuzzy decision-theoretic rough sets and relevant three-way decision rules are proposed. Finally, it is illustrated that these models adopt different attitudes and decision-making schemes for target evaluation through an example, and the effectiveness of the algorithm is verified.

**Keywords:** three-way decision; interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set; continuous cross-entropy; decision-theoretic rough set

收稿日期: 2023-08-21

基金项目: 国家自然科学基金(62376229)

\* 通信作者: 徐伟华, 男, 教授, 博士生导师, 主要从事人工智能、认知计算、数据挖掘、粒计算等方面研究。E-mail: chxuwh@gmail.com

随着大数据时代的来临,海量的复杂数据开始不断涌现,导致产生大量的不确定问题。为处理数据中存在的确定信息,许多不确定性知识发现的方法被相继提出,比如粗糙集<sup>[1]</sup>和模糊集<sup>[2]</sup>等。

由 Pawlak 提出的粗糙集理论<sup>[1]</sup>通过划分等价类来计算上近似集和下近似集,相应把论域划分成了正域、负域与边界域三个部分。最初的经典粗糙集理论建立在单个二元关系(单粒度)下,然而现实生活中可能还会面临各种各样的关系,从而产生不同的粒度结构,传统的粗糙集理论难以解决这类问题。Qian 等<sup>[3-5]</sup>在多个等价关系基础上建立了多粒度粗糙集及其扩展模型。由于这种关系的划分过于严格,为了减少决策错误带来的代价,Yao<sup>[6]</sup>提出了一种更符合人类思考习惯的决策方式——三支决策,对粗糙集论域划分的三个区域进行了语义解释。在此基础上结合贝叶斯最小风险决策理论,就产生了决策粗糙集理论<sup>[7]</sup>,它主要是利用给定的一组决策代价参数来计算阈值对 $[0, 1]$ 。

由 Zadeh<sup>[2]</sup>在 1986 年提出的模糊集理论对决策中的模糊性进行有效表示与描述,近年来多种模糊集的扩展理论被提出,例如,直觉模糊集<sup>[8]</sup>、Type 2 型模糊集<sup>[9]</sup>和模糊多重集<sup>[10]</sup>等。孙文鑫<sup>[11]</sup>结合粗糙集和模糊集理论,构建了多粒度广义近似空间中的模糊粗糙集模型。随着大数据时代的到来,信息中的决策环境变得越来越复杂,模糊集理论在处理决策问题中的模糊不确定性方面存在一些限制。许多情况下,人们在给出决策时会因存在许多可能的情况而产生犹豫。Torra<sup>[12]</sup>提出的犹豫模糊集允许以几个可能值集合形式来表示某对象对模糊集合的隶属程度,然而它未考虑到评价信息为区间值的情形。同时,许多信息并非精确的单一模糊值,因此在决策信息表达上采用区间值形式相对更加灵活与合理。由于区间犹豫模糊集<sup>[13]</sup>对犹豫信息具有很好的刻画能力,自其出现以来就有大量的学者进行了相关研究<sup>[14-16]</sup>。通过赋予不同权重值的决策属性,Ye<sup>[14]</sup>提出了区间值犹豫模糊优先加权平均算子与几何算子,并给出了相应的决策规则。Tavakkoli 等<sup>[15]</sup>使用优劣解距离法(TOPSIS)给出了新的区间值犹豫模糊环境下的属性权重确定方法。对于区间值犹豫模糊环境下的决策属性不完全已知的风险型决策问题,阮传扬等<sup>[16]</sup>结合后悔理论提出了一种新的决策方法,并通过算例验证了有效性。目前,针对

区间犹豫模糊集的研究主要在解决多属性决策问题上,包括决策制定<sup>[17]</sup>、熵测量<sup>[18]</sup>、距离以及相似性测度<sup>[19]</sup>等方面。

由于三支决策为人们做出决策提供了更好的选择,因此许多学者将三支决策与模糊集理论相结合。王茜等<sup>[20]</sup>构建了两种基于粒度加权策略并结合三支决策的粗糙集模型。Liang 等<sup>[21]</sup>结合直觉模糊集,基于隶属度和非隶属度的概念提出了一种直觉模糊代价的三支决策模型。Zhang 等<sup>[22]</sup>从乐观和悲观两个角度定义了属性值和决策代价,同时提出以直觉模糊数的形式表示的直觉模糊三支决策模型。考虑犹豫模糊集,Xu 等<sup>[23]</sup>提出了一种基于犹豫模糊决策理论粗糙集的最小风险策略,用于风险决策与资源分配。Qiao<sup>[24]</sup>研究了犹豫关系的一些性质,并且给出了犹豫关系在三支决策中构造评价函数的一些应用。本文针对区间犹豫模糊信息系统,提出两种基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型和相应的规则提取算法,并提出一个案例验证其有效性。

## 1 预备知识

### 1.1 模糊集

不同于普通集合,模糊集中对象和集合没有明确的隶属关系,因此可用于处理模糊性问题。本节简单介绍模糊集及其扩展模型,详细内容见文献<sup>[2, 11, 13]</sup>。

设  $U$  为非空有限论域,在  $U$  上的一个模糊集<sup>[2]</sup>  $F$  可以表示为  $F = \{(x, F(x)) \mid x \in U\}$ ,其中  $F: U \rightarrow [0, 1]$ ,  $F(x)$  表示模糊集  $F$  的隶属函数,描述的是论域  $U$  上的元素  $x$  隶属于模糊集  $F$  的程度,取值为区间 $[0, 1]$ 上的某个数值。论域  $U$  上所有模糊集合表示为  $F(U)$ 。

设  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是一个非空有限论域,则  $U$  上的一个犹豫模糊集<sup>[11]</sup>  $E$  可以被定义为  $E = \{\langle x, h_E(x) \rangle \mid x \in U\}$ ,其中,犹豫模糊数  $h_E(x) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$  是区间 $[0, 1]$ 上的按照升序排列的不同值的集合, $h_E(x)$  表示  $U$  上元素  $x$  属于  $E$  的所有可能隶属度组成的集合。 $l$  表示犹豫模糊数  $h_E(x)$  中的元素个数。当论域中所有对象的  $l = 1$  时,犹豫模糊集退化为普通模糊集。

设一个非空有限论域是  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,则  $U$  上的一个区间犹豫模糊集<sup>[13]</sup>  $\bar{E}$  可以被定义为

$\bar{E} = \{\langle x, \bar{h}_E(x) \rangle \mid x \in U\}$ , 其中区间犹豫模糊数  $\bar{h}_E(x)$  是区间  $[0, 1]$  上一些不等区间数的集合, 表示对象  $x$  的可能隶属度的集合。

### 1.2 多粒度粗糙集

粗糙集理论是一种处理不确定信息的有效工具。Qian 等<sup>[5]</sup> 提出采用多个粒结构来替代传统单粒度的知识粒, 以实现概念的粗糙表示与近似逼近, 并构建了多粒度粗糙集。多粒度粗糙集包含乐观多粒度粗糙集(“求同存异”思想)和悲观多粒度粗糙集(“求同排异”思想)。

给定  $U$  上的二元关系  $R_i (i = 1, 2, \dots, p)$ , 对于任意集合  $X \subseteq U$ ,  $X$  的乐观多粒度下近似记为

$$\sum_{i=1}^p R_i^O(X) = \{x \mid [x]_{R_1} \subseteq X \vee [x]_{R_2} \subseteq X \vee \dots \vee [x]_{R_p} \subseteq X, x \in U\}, X \text{ 的乐观多粒度上近似记为}$$

$$\sum_{i=1}^p R_i^O(X) = \left( \sum_{i=1}^p R_i^O(X^C) \right)^C, \quad \text{序偶}$$

$\left( \sum_{i=1}^p R_i^O(X), \sum_{i=1}^p R_i^O(X) \right)$  称为集合  $X$  关于关系  $R_i$  的乐观多粒度粗糙集, 其中  $[x]_{R_i} (i = 1, 2, \dots, p)$  称为  $x$  关于等价关系  $R_i$  的等价类。乐观多粒度粗糙上近似集合称为  $X$  的乐观多粒度正域, 乐观多粒度粗糙上近似集合与下近似集合的差集称为乐观多粒度边界域。

给定  $U$  上的二元关系  $R_i (i = 1, 2, \dots, p)$ , 对于任意集合  $X \subseteq U$ ,  $X$  的悲观多粒度下近似记为

$$\sum_{i=1}^p R_i^P(X) = \{x \mid [x]_{R_1} \subseteq X \wedge [x]_{R_2} \subseteq X \wedge \dots \wedge [x]_{R_p} \subseteq X, x \in U\}, X \text{ 的悲观多粒度上近似记为}$$

$$\sum_{i=1}^p R_i^P(X) = \left( \sum_{i=1}^p R_i^P(X^C) \right)^C, \quad \text{序偶}$$

$\left( \sum_{i=1}^p R_i^P(X), \sum_{i=1}^p R_i^P(X) \right)$  称为集合  $X$  关于关系  $R_i$  的悲观多粒度粗糙集, 悲观多粒度粗糙上近似集合称为  $X$  的悲观多粒度正域, 悲观多粒度粗糙上近似集合与下近似集合的差集称为悲观多粒度边界域。

### 1.3 三支决策

三支决策<sup>[6]</sup> 是指通过一对阈值将论域划分为三个互不相交的区域, 即正区域、边界域和负区域。针对正区域中的对象采取接受决策, 对于边界区域中的对象则延迟决策, 而负区域中的对象执行拒绝决策。为了更好地构建相应模型, 本小节介绍三支决策

模型和决策理论粗糙集的基础知识, 详见参考文献[6-7]。

给定论域  $U$  是一个非空有限的对象集合, 通过一对阈值  $(\alpha, \beta)$  把论域  $U$  划分成三个互不相交的区域, 即对任意的  $x \in U$ , 有下列式子成立:  $P_{OS} = \{x \mid \alpha \leq \mu(x) \leq 1\}$ ,  $B_{ND} = \{x \mid \beta \leq \mu(x) \leq \alpha\}$ ,  $N_{EG} = \{x \mid 0 \leq \mu(x) \leq \beta\}$ 。其中:  $P_{OS}$ 、 $B_{ND}$  和  $N_{EG}$  分别表示正区域、边界域和负区域;  $\mu(x)$  表示对象  $x$  对目标概念的隶属度。对象划分在正区域, 表示该对象属于目标概念; 对象划分在负区域, 表示该对象不属于目标概念; 对象划分在边界域, 表示信息不足需要引入更多信息进行进一步决策。

为了更加合理地选取决策阈值, Yao<sup>[7]</sup> 通过引入贝叶斯最小风险, 提出了决策理论粗糙集。对于一个状态集  $\Omega = \{X, \neg X\}$  和一个行为集  $A = \{a_P, a_B, a_N\}$ , 其中,  $X$  和  $\neg X$  分别表示属于目标概念和不属于目标概念,  $a_P$ 、 $a_B$  和  $a_N$  分别表示将对象划分到正域、边界域和负域的行为。则一个代价矩阵可以被构造为表 1 的形式。

表 1 决策粗糙集的代价矩阵

Tab. 1 Cost matrix of decision rough set

行为	$X$	$\neg X$
$a_P$	$\lambda_{PP}$	$\lambda_{PN}$
$a_B$	$\lambda_{BP}$	$\lambda_{BN}$
$a_N$	$\lambda_{NP}$	$\lambda_{NN}$

表 1 中:  $\lambda_{PP}$ 、 $\lambda_{BP}$  和  $\lambda_{NP}$  分别表示属于目标概念的对象被划分到正域、边界域和负域行为的代价;  $\lambda_{PN}$ 、 $\lambda_{BN}$  和  $\lambda_{NN}$  分别表示不属于目标概念的对象被划分到正域、边界域和负域行为的代价。基于贝叶斯最小决策代价, 阈值  $(\alpha, \beta)$  计算公式如下:

$$\alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})},$$

$$\beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}.$$

## 2 区间犹豫模糊多粒度粗糙集

鉴于区间值犹豫模糊集在描述不确定性信息方面的优势, 以及多粒度粗糙集处理不确定信息的优点, 本节将结合这两种理论模型, 提出了一种新的模型——区间值犹豫模糊多粒度粗糙集模型。首先给出了区间值犹豫模糊粗糙集的定义, 然后运用粒计算思想引入了区间值犹豫模糊多粒度粗糙集, 并介绍了其基本特性。

### 2.1 区间犹豫模糊粗糙集

定义 1(区间犹豫模糊关系) 给定一个非空有限论域  $U$ , 在  $U$  上的一个区间犹豫模糊关系  $R \subseteq U \times U$  定义为

$$R = \{ \langle (\mu, v), s_R(\mu, v) \rangle \mid (\mu, v) \in U \times U \},$$

式中  $s_R: U \times U \rightarrow [0, 1]$  是取值在  $[0, 1]$  上的几个可能的区间数的集合, 它表示的是元素  $\mu$  与  $v$  之间的可能隶属度. 论域  $U$  上所有区间犹豫模糊关系的集合记为  $R_{IVHF}(U \times U)$ .

根据以上二元关系的定义, 区间犹豫模糊粗糙集的定义如下.

定义 2(区间犹豫模糊粗糙集) 给定一个非空有限论域  $U$  以及一个区间犹豫模糊关系  $R \in R_{IVHF}(U \times U)$ , 称  $(U, R)$  为一个区间值犹豫模糊近似空间. 对于  $U$  上的任意一个区间值犹豫模糊集合  $I \in S_{IVHF}(U)$ ,  $I$  关于近似空间  $(U, R)$  的下近似定义为  $\underline{R}(I) = \{ \langle \mu, s_{\underline{R}(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \}$ , 其中  $s_{\underline{R}(I)}(\mu) = \bigcap_{v \in U} \{ s_R(\mu, v) \cup s_I(v) \}$ .  $I$  关于近似空间  $(U, R)$  的上近似定义为:  $\bar{R}(I) = \{ \langle \mu, s_{\bar{R}(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \}$ , 其中  $s_{\bar{R}(I)}(\mu) = \bigcup_{v \in U} \{ s_R(\mu, v) \cap s_I(v) \}$ . 称序偶  $(\underline{R}(I), \bar{R}(I))$  是区间犹豫模糊集  $I$  关于  $R$  的一个犹豫模糊粗糙集模型, 其中  $\underline{R}(I)$  与  $\bar{R}(I)$  都是区间值犹豫模糊集,  $\bar{R}$  和  $\underline{R}$  分别是区间值犹豫模糊上近似算子和下近似算子.

### 2.2 区间犹豫模糊多粒度粗糙集

本节将结合区间值犹豫模糊粗糙集理论与粒计算的思想, 探讨两种不同态度下多粒度粗糙集模型. 并给出乐观与悲观区间值犹豫模糊粗糙集的定义.

定义 3(乐观区间犹豫模糊多粒度粗糙集) 给定一个非空有限论域  $U$  以及区间犹豫模糊关系  $R_j \in R_{IVHF}(U \times U) (j = 1, 2, \dots, n)$ , 对于区间值犹豫模糊集  $I \in S_{IVHF}(U)$ ,  $I$  的乐观区间值犹豫模糊多粒度粗糙下近似和上近似分别表示为

$$\underline{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I) = \{ \langle \mu, s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \},$$

$$\bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I) = \{ \langle \mu, s_{\bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \}.$$

其中:

$$s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I)}(\mu) = \bigcap_{j=1}^n \bigcap_{v \in U} \{ s_{R_j}(\mu, v) \cup s_I(v) \},$$

$$s_{\bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I)}(\mu) = \bigcap_{j=1}^n \bigcup_{v \in U} \{ s_{R_j}(\mu, v) \cap s_I(v) \}.$$

序偶  $(\underline{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I), \bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^O(I))$  称为区间值犹豫模糊集  $I$  关于关系  $R_j (j = 1, 2, \dots, n)$  的一个乐观区间值犹豫模糊多粒度粗糙集, 其中上近似与下近似都是区间值犹豫模糊集合.

定义 4(悲观区间犹豫模糊多粒度粗糙集) 给定一个非空有限论域  $U$  和区间犹豫模糊关系  $R_j \in R_{IVHF}(U \times U) (j = 1, 2, \dots, n)$ , 对于区间值犹豫模糊集  $I \in S_{IVHF}(U)$ ,  $I$  的区间值悲观犹豫模糊多粒度粗糙下近似和上近似分别表示为

$$\underline{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I) = \{ \langle \mu, s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \},$$

$$\bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I) = \{ \langle \mu, s_{\bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \}.$$

其中:

$$s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I)}(\mu) = \bigcap_{j=1}^n \bigcap_{v \in U} \{ s_{R_j}(\mu, v) \cup s_I(v) \},$$

$$s_{\bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I)}(\mu) = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{v \in U} \{ s_{R_j}(\mu, v) \cap s_I(v) \}.$$

序偶  $(\underline{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I), \bar{G}_{\sum_{j=1}^n R_j}^P(I))$  是区间值犹豫模糊集  $I$  关于区间犹豫模糊关系  $R_j (j = 1, 2, \dots, n)$  的一个区间值悲观犹豫模糊多粒度粗糙集, 其中下近似与上近似都是区间值犹豫模糊集合. 当区间犹豫模糊关系中的  $n$  取值为 1 时, 区间值犹豫模糊多粒度粗糙集演化为区间值犹豫模糊单粒度粗糙集.

## 3 基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型

基于三支决策理论更符合人类认知习惯的特点, 将其与上文中的区间犹豫模糊多粒度粗糙集模型相结合, 构建区间值犹豫模糊粗糙多粒度三支决策模型. 本节首先通过提出一种新的连续交叉熵来确定条件概率, 然后在区间犹豫模糊损失函数矩阵的基础上重新定义阈值对  $(\alpha, \beta)$ , 制定相应的三支决策规则提取算法.

### 3.1 条件概率

构建三支决策模型之前, 需要先确定对象与不同状态之间的相似距离. 下面分别通过融合公式、加权平均算子和连续交叉熵的介绍来得出条件概率的计算公式.

定义 5(区间犹豫模糊多粒度粗糙集上下近似融合公式) 设  $U$  是一个非空有限论域,  $R_j \in$

$R_{IVHF}(U \times U) (j = 1, 2, \dots, n)$  是  $U$  上的区间犹豫模糊关系,  $I \in S_{IVHF}(U)$  是  $U$  上的一个区间值犹豫模糊集,  $I$  关于关系  $R_j$  的区间值犹豫模糊多粒度粗糙上下近似融合公式定义如下:

$$G_{\sum_{j=1}^n R_j}^{\nabla_n}(I) = \{ \langle \mu, s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^{\nabla_n}(I)}(\mu) \rangle \mid \mu \in U \}. \quad (1)$$

式中:  $s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^{\nabla_n}(I)}(\mu) = \frac{1}{2} \left( s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^{\nabla_n}(I)}(\mu) + 1 - s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^{\nabla_n}(I)}(\mu) \right)$ ,  $\nabla = O$  或  $P$ .

**定义 6(连续有序加权平均算子)** 设  $Q(y)$  是一个基本单元区间单调函数, 给出关系  $F: M \rightarrow \mathbf{R}^+$ , 则连续有序加权平均算子定义如下:

$$F_Q(c) = F_Q([c^l, c^u]) = \int_0^1 \frac{dQ(y)}{dy} (c^l + y(c^u - c^l)) dy, \quad (2)$$

式中  $c = [c^l, c^u] \in M$ ,  $M$  是所有非负区间值组成的集合。

给定  $\lambda = \int_0^1 Q(y) dy$ , 则可以得到  $F_Q(c) = F_Q([c^l, c^u]) = \lambda c^u + (1 - \lambda)c^l$ , 其中  $\lambda$  是  $Q$  的特征函数, 因此  $F_Q([c^l, c^u])$  是特征函数参数闭区间端点的加权平均值, 也是  $[c^l, c^u]$  的态度期望数。

基于犹豫模糊集的犹豫模糊组合熵的定义, 我们可以定义一种新的区间值犹豫模糊连续交叉熵, 它可以用来反映两区间值犹豫模糊数之间的差异程度。

**定义 7(区间值犹豫模糊连续交叉熵)** 给定两个区间值犹豫模糊数  $s_1$  和  $s_2$ , 基于定义 6, 我们定义关于  $s_1$  和  $s_2$  的区间犹豫模糊连续交叉熵如下:

$$E_C(s_1, s_2) = \frac{-1}{l} \sum_{k=1}^l \left( \frac{F_Q(s_1^k) + 1 - F_Q(s_2^k)}{2} \cdot \ln \frac{F_Q(s_1^k) + 1 - F_Q(s_2^k)}{2} + \frac{F_Q(s_2^k) + 1 - F_Q(s_1^k)}{2} \cdot \ln \frac{F_Q(s_2^k) + 1 - F_Q(s_1^k)}{2} \right). \quad (3)$$

**定理 1** 给定两个区间值犹豫模糊数  $s_1$  和  $s_2$ ,  $E_C(s_1, s_2)$  是它们的区间犹豫模糊连续交叉熵, 则  $E_C(s_1, s_2)$  满足以下两个条件:

$$1) 0 \leq E_C(s_1, s_2) \leq \ln 2;$$

2) 当且仅当  $[s_1^k(l), s_1^k(u)] = [s_2^k(l), s_2^k(u)]$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  时  $E_C(s_1, s_2) = \ln 2$ 。

根据公式(3)容易证得, 区间犹豫模糊连续交叉熵是随着模糊数  $s_1$  与  $s_2$  的加权平均差值的增大而单调递减的。亦即, 当两个模糊数完全一样时, 交叉熵取最大值。

优劣解距离法(TOPSIS)的主要思想是, 借助于求解事物和相应的正或负理想解的距离大小从而可以对有关事物进行评价。因为连续交叉熵这一概念能够将不同的信息进行对比, 反映出它们之间的区别大小, 这里将上述新的区间值犹豫模糊连续交叉熵作为对象  $x$  与相应的两个不同理想解的距离。假设区间值犹豫模糊数具有正理想解  $s^+$  和负理想解  $s^-$ , 参考决策理论粗糙集的定义,  $s^+$  表示对状态  $C$  的评估,  $s^-$  表示对状态  $\neg C$  的评估。如果  $s$  里的每个区间值更接近 1, 那么表示  $s$  是更理想的, 可以得出  $s^+ = \langle \{[1, 1]\} \rangle$  和  $s^- = \langle \{[0, 0]\} \rangle$ 。当两个模糊数的加权平均差值最大时, 即分别是正负理想解时, 交叉熵为达到最小值零。

**定义 8(条件概率)** 给出正负理想解分别为  $s^+$  和  $s^-$ , 我们定义状态  $C$  与对象  $\mu$  的条件概率如下:

$$P(C \mid \mu) = \frac{E_C(s^+, s)}{E_C(s^+, s) + E_C(s^-, s)}, \quad (4)$$

式中  $s = \langle s_{G_{\sum_{j=1}^n R_j}^{\nabla_n}(I)}(\mu) \mid \mu \in U \rangle$ 。

上述定义中的  $C$  表示属于目标概念的状态, 通过一组融合上下近似粗糙集后的模糊数来体现。这里的条件概率与传统意义上的不同, 本文中所说的条件概率是指对象  $\mu$  属于目标概念的概率, 本文通过条件概率来模拟模糊隶属度, 化区间值为传统模糊值, 表示了状态  $C$  拥有对象  $\mu$  的程度。条件概率越大, 表示融合上下近似后的粗糙集在对象  $\mu$  上距离正理想解更接近, 说明对象  $\mu$  与状态  $C$  这一组模糊数的模糊关系越接近。

### 3.2 阈值的确定

在决策理论粗糙集中, 由于对象  $x$  可能划分在正区域、负区域和边界域, 不同区域的决策行为也不同, 所以有必要将条件概率与阈值  $(\alpha, \beta)$  进行比较。考虑到所有损失函数都可以用区间犹豫模糊数表示, 即区间犹豫模糊损失函数矩阵, 如表 2 所示。本文提出了区间值犹豫模糊近似度, 并重新定义了阈

值  $\alpha$  和  $\beta$ 。

表 2 区间犹豫模糊损失函数矩阵

Tab. 2 Interval-valued hesitant fuzzy loss function matrix

行为	$C$	$\neg C$
$a_P$	$\lambda_{PP} = \langle s_{\lambda_{PP}} \rangle$	$\lambda_{PN} = \langle s_{\lambda_{PN}} \rangle$
$a_B$	$\lambda_{BP} = \langle s_{\lambda_{BP}} \rangle$	$\lambda_{BN} = \langle s_{\lambda_{BN}} \rangle$
$a_N$	$\lambda_{NP} = \langle s_{\lambda_{NP}} \rangle$	$\lambda_{NN} = \langle s_{\lambda_{NN}} \rangle$

**定义 9(区间犹豫模糊近似度)** 给定两个区间值犹豫模糊数  $s_1 = \langle \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n} \rangle$  和  $s_2 = \langle \gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2n} \rangle$ , 它们的区间犹豫模糊近似度定义为

$$g(s_1, s_2) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{j=1}^n (\gamma_{1j}^u + \gamma_{2j}^u) - \sum_{j=1}^n (\gamma_{2j}^l + \gamma_{1j}^l) \right). \quad (5)$$

考虑到在采取接受、拒绝和推迟态度时的损失应该要具有现实意义, 所以  $\lambda_{**}$  应具有合理的假设:  $\lambda_{PP} < \lambda_{BP} < \lambda_{NP}, \lambda_{NN} < \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$ 。

基于以上定义, 本文提出了如下关于区间犹豫模糊决策理论粗糙集的三支决策规则:

- 1) 如果  $P(C | [\mu]) \geq \alpha$ , 则  $\mu \in P_{OS}(C)$ ;
- 2) 如果  $\beta < P(C | [\mu]) < \alpha$ , 则  $\mu \in B_{ND}(C)$ ;
- 3) 如果  $P(C | [\mu]) \leq \beta$ , 则  $\mu \in N_{EG}(C)$ 。

其中:

$$\alpha = \frac{g(\lambda_{PN}, \lambda_{BN})}{g(\lambda_{PN}, \lambda_{BN}) + g(\lambda_{BP}, \lambda_{PP})};$$

$$\beta = \frac{g(\lambda_{BN}, \lambda_{NN})}{g(\lambda_{BN}, \lambda_{NN}) + g(\lambda_{NP}, \lambda_{BP})}.$$

### 3.3 基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策规则提取算法

通过以上相关定义, 可以分别得出基于区间犹豫模糊数的相似距离计算方法。考虑到人们悲观和乐观两种不同的态度, 分别产生了乐观和悲观多粒度粗糙集模型。因为悲观情形下的规则提取算法与乐观情形类似, 所以本节只给出乐观情形下的基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策规则提取算法, 即算法 1。

**算法 1:** 基于乐观区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策规则提取算法

输入: 多个区间犹豫模糊关系  $R_j \in R_{IVHF}(U \times U), \mu \in U, I \subseteq S_{IVHF}(U)$  和损失函数矩阵  $L$ 。

输出:  $P_{OS}^0(C), B_{ND}^0(C), N_{EG}^0(C)$ 。

- 1 初始化  $N_{EG}^0(C) \leftarrow \emptyset$ ;
- 2 初始化  $\underline{G}_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I) = \overline{G}_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I) = \emptyset$ ;
- 3 if  $U \neq \emptyset$  then
- 4     for 每个  $\mu_j \in U$  do
- 5         计算  $s_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I)(\mu_j)$ ;
- 6          $\underline{G}_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I) = \bigcup \langle \mu_j, s_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I)(\mu_j) \rangle$ ;
- 7         计算  $s_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I)(\mu_j)$ ;
- 8          $\overline{G}_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I) = \bigcup \langle \mu_j, s_{\sum_{j=1}^{R_j}}^0(I)(\mu_j) \rangle$ ;
- 9         end
- 10     end
- 11 计算  $P^0(C | \mu_j)$ ;
- 12 计算  $\lambda_{PN} - \lambda_{BN}, \lambda_{BP} - \lambda_{PP}, \lambda_{BN} - \lambda_{NN}, \lambda_{NP} - \lambda_{BP}$ ;
- 13 计算  $\alpha, \beta$ ;
- 14 if  $P^0(C | \mu_j) \geq \alpha$  then
- 15      $P_{OS}^0(C) \leftarrow \mu_j$ ;
- 16     end
- 17 if  $\beta < P^0(C | \mu_j) < \alpha$  then
- 18      $B_{ND}^0(C) \leftarrow \mu_j$ ;
- 19     end
- 20 if  $P^0(C | \mu_j) \leq \beta$  then
- 21      $N_{EG}^0(C) \leftarrow \mu_j$ ;
- 22     end
- 23 return  $P_{OS}^0(C), B_{ND}^0(C), N_{EG}^0(C)$ 。

## 4 实际案例与对比分析

本节采用一个医疗诊断案例来验证提出模型的有效性, 然后通过两种不同情形下的基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型的结果来对比分析各自优势。

### 4.1 案例描述与对策

我们在双论域条件下应用区间犹豫模糊粗糙集模型来解决医疗诊断问题。假设论域  $U = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$  是临床上的五种常见症状, 分别代表“发烧”“头痛”“胃痛”“咳嗽”和“胸闷”, 论域  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  是五种疾病, 其中  $v_j$  分别代表“流感”“肺炎”“胃炎”“哮喘”和“心绞痛”。假定  $R_1, R_2 \in R_{IVHF}(U \times V)$  是两个区间犹豫模糊关系, 对于任意  $(\mu_i, v_j) \in U \times V$ ,  $s_{R_1}(\mu_i, v_j)$  和  $s_{R_2}(\mu_i, v_j)$  表示症状  $\mu_i (\mu_i \in U)$  和疾病  $v_j (v_j \in V)$  之间相关的区间隶属度, 这由两名

医生预先评估得出。此外,  $R_1$  和  $R_2$  是症状和疾病之间相关关系的两个医学知识统计数据, 见表 3 和表 4。

表 3  $R_1$  下的区间值犹豫模糊关系

Tab. 3 Interval-valued hesitant fuzzy relation under  $R_1$

$R_1$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$\mu_1$	$\langle [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.4, 0.6] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.3, 0.5] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.3] \rangle$
$\mu_2$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.2, 0.4] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$
$\mu_3$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.5, 0.7] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.2, 0.4] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$
$\mu_4$	$\langle [0.5, 0.7], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.5, 0.7] \rangle$
$\mu_5$	$\langle [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.6, 0.7], [0.7, 0.8] \rangle$

表 4  $R_2$  下的区间值犹豫模糊关系

Tab. 4 Interval-valued hesitant fuzzy relation under  $R_2$

$R_2$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$\mu_1$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.1, 0.3], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.1, 0.3], [0.2, 0.3] \rangle$
$\mu_2$	$\langle [0.3, 0.4], [0.3, 0.5] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.4, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.6], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle$
$\mu_3$	$\langle [0.4, 0.5], [0.4, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.7], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.1, 0.3], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$
$\mu_4$	$\langle [0.5, 0.6], [0.5, 0.7] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.2, 0.4], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.6], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle$
$\mu_5$	$\langle [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.4, 0.6], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.6], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.5, 0.7] \rangle$

在临床实践中, 患者可以看不同的医生, 可能得到不同的诊断。为了减少误诊的风险, 我们应该仔细考虑所有医生的意见。在这个例子中, 我们假设  $I$  代表患者。 $I$  的表现症状可以由论域  $U$  上的区间犹豫模糊集来描述。给定

$$I = \langle \mu_1, \{[0.3, 0.4], [0.5, 0.8]\} \rangle, \langle \mu_2, \{[0.2, 0.3], [0.4, 0.5]\} \rangle, \langle \mu_3, \{[0.2, 0.4], [0.6, 0.8]\} \rangle, \langle \mu_4, \{[0.3, 0.4], [0.5, 0.7]\} \rangle, \langle \mu_5, \{[0.5, 0.7], [0.6, 0.8]\} \rangle,$$

则基于区间犹豫模糊多粒度粗糙集的两种三支决策模型可通过如下步骤获得。

1) 基于乐观区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型。

步骤 1: 根据定义 3, 计算乐观区间犹豫模糊多粒度粗糙集, 结果为

$$\begin{aligned} G_2^{O_1}(I) &= \langle \langle v_1, \{[0.3, 0.5], [0.5, 0.7]\} \rangle, \langle v_2, \{[0.3, 0.5], [0.6, 0.7]\} \rangle, \langle v_3, \{[0.4, 0.5], [0.5, 0.7]\} \rangle, \langle v_4, \{[0.4, 0.5], [0.5, 0.7]\} \rangle, \langle v_5, \{[0.3, 0.5], [0.5, 0.6]\} \rangle \rangle, \\ \bar{G}_2^{O_1}(I) &= \langle \langle v_1, \{[0.3, 0.4], [0.5, 0.6]\} \rangle, \langle v_2, \{[0.5, 0.6], [0.6, 0.8]\} \rangle, \langle v_3, \{[0.4, 0.5], [0.6, 0.8]\} \rangle, \langle v_4, \{[0.3, 0.4], [0.6, 0.8]\} \rangle, \langle v_5, \{[0.3, 0.4], [0.5, 0.8]\} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

步骤 2: 在乐观情况下计算每个条件概率, 如表

5 所示。

表 5 乐观情形下区间犹豫模糊多粒度粗糙集的条件概率

Tab. 5 Conditional probability of interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set in optimistic scenario

V	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$P^O(C   v_i)$	0.738 8	0.532 1	0.627 6	0.397 9	0.425 9

步骤 3:表 6 给出了在不同状态下采取不同行

表 6 损失函数矩阵

Tab. 6 Loss function matrix

行为	C	$\neg C$
$a_P$	$\lambda_{PP} = \langle \langle [0.05, 0.10], [0.15, 0.30] \rangle \rangle$	$\lambda_{PN} = \langle \langle [0.80, 0.90], [0.90, 1.00] \rangle \rangle$
$a_B$	$\lambda_{BP} = \langle \langle [0.12, 0.37], [0.41, 0.62] \rangle \rangle$	$\lambda_{BN} = \langle \langle [0.31, 0.45], [0.58, 0.66] \rangle \rangle$
$a_N$	$\lambda_{NP} = \langle \langle [0.79, 0.94], [0.99, 1.00] \rangle \rangle$	$\lambda_{NN} = \langle \langle [0.00, 0.06], [0.08, 0.14] \rangle \rangle$

步骤 4:基于表 3 ~ 4 和上文的决策规则,我们

可以获得乐观情况下的三支决策结果,即

$$P_{OS}^O(C) = \{v_1\},$$

$$B_{ND}^O(C) = \{v_2, v_3\},$$

$$N_{EG}^O(C) = \{v_4, v_5\}.$$

我们可以得出以下结论:患者 I 最有可能患上的疾病是流感( $v_1$ ),不太可能患有哮喘( $v_4$ )和心绞痛( $v_5$ ),至于患者是否患有肺炎( $v_2$ )和胃炎( $v_3$ )需要进一步评估。

2) 基于悲观区间犹豫模糊多粒度粗糙集的三支决策模型。

步骤 1:根据定义 4,计算悲观区间犹豫模糊多粒度粗糙集,结果为

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\sum_{j=1}^{R_j}}^{P_2}(I) = & \langle \langle v_1, \{[0.4, 0.5], [0.5, 0.6]\} \rangle \rangle, \\ & \langle v_2, \{[0.3, 0.4], [0.6, 0.7]\} \rangle, \\ & \langle v_3, \{[0.4, 0.6], [0.5, 0.6]\} \rangle, \\ & \langle v_4, \{[0.4, 0.5], [0.6, 0.7]\} \rangle, \\ & \langle v_5, \{[0.3, 0.4], [0.5, 0.6]\} \rangle \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\sum_{j=1}^{R_j}}^{P_2}(I) = & \langle \langle v_1, \{[0.4, 0.6], [0.5, 0.7]\} \rangle \rangle, \\ & \langle v_2, \{[0.4, 0.6], [0.6, 0.8]\} \rangle, \\ & \langle v_3, \{[0.3, 0.5], [0.5, 0.8]\} \rangle, \\ & \langle v_4, \{[0.3, 0.5], [0.6, 0.8]\} \rangle, \\ & \langle v_5, \{[0.3, 0.6], [0.5, 0.8]\} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

步骤 2:在悲观情况下计算每个条件概率,如表 7 所示。

动的损失函数矩阵。根据定义 9,我们可以得到:

$$\alpha = \frac{g(\lambda_{PN}, \lambda_{BN})}{g(\lambda_{PN}, \lambda_{BN}) + g(\lambda_{BP}, \lambda_{PP})} = \frac{0.40}{0.40 + 0.23} = 0.634 9,$$

$$\beta = \frac{g(\lambda_{BN}, \lambda_{NN})}{g(\lambda_{BN}, \lambda_{NN}) + g(\lambda_{NP}, \lambda_{BP})} = \frac{0.43}{0.43 + 0.55} = 0.438 7.$$

表 7 悲观情形下区间犹豫模糊多粒度粗糙集的条件概率

Tab. 7 Conditional probability of interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity rough set in pessimistic scenario

V	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$P^P(C   v_i)$	0.858 9	0.592 4	0.502 2	0.386 1	0.547 3

步骤 3:阈值  $\alpha$  和  $\beta$  在乐观情形 1) 中已计算。

步骤 4:基于表 3 ~ 4 和上文的决策规则,我们可以获得悲观情况下的三支决策结果,即

$$P_{OS}^P(C) = \{v_1\},$$

$$B_{ND}^P(C) = \{v_2, v_3, v_5\},$$

$$N_{EG}^P(C) = \{v_4\}.$$

我们可以得出以下结论:患者 I 最有可能患上的疾病是流感( $v_1$ ),不太可能患有哮喘( $v_4$ ),至于患者是否患有肺炎( $v_2$ )、胃炎( $v_3$ )和心绞痛( $v_5$ )需要进一步评估。

## 4.2 结果分析

由上可知,基于不同的区间值犹豫模糊多粒度粗糙集,两个三支决策模型的决策结果也不同。表 8 总结了模型比较和分析的结果。此外,每个模型的条件概率如图 1 所示。我们可以将表 5 的条件概率视为医生对患者诊断结果的隶属度,在乐观条件下,流感( $v_1$ )的条件概率最高,说明了患者 I 根据模型计算得到的状态与流感( $v_1$ )的契合度最高,从而推测出患者大概率得了流感( $v_1$ )。同理可以发现在悲观情况下,依然是流感( $v_1$ )具有最高的条件概率,因此同时参考两个模型可以发现,患者极大概率得了

流感( $v_1$ )而没有得哮喘( $v_4$ ),为其医疗诊断提供了很大的帮助。

表8 两种三支决策模型的结果对比

Tab. 8 Result comparison of two kinds of three-way decision model

不同情形	$P_{OS}(C)$	$B_{ND}(C)$	$N_{EG}(C)$
乐观	$\{v_1\}$	$\{v_1, v_3\}$	$\{v_4, v_5\}$
悲观	$\{v_1\}$	$\{v_2, v_3, v_5\}$	$\{v_4\}$

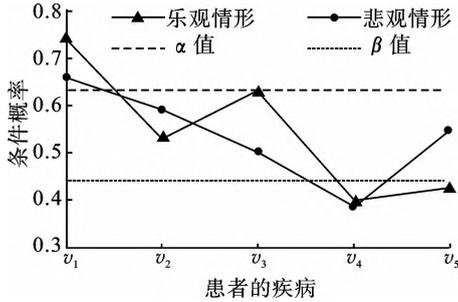


图1 两种三支模型的条件概率

Fig. 1 Conditional probability of two kinds of three-way decision model

从图1可以看出,乐观情况下的条件概率具有相对最大值,悲观情况下的条件概率具有相对最小值。同时可以看出,乐观情况下接受条件概率距离边界更远,而悲观情况下拒绝条件概率距离边界更远,说明两模型各有各的决策方法,针对不同的情景提供不同的决策。表8说明,提出的模型具有一定的区分度,并且可以根据需要按需调整所需模型。最终实验结果表明,这两种不同的三支决策模型可以解决在区间值犹豫模糊背景下不确定信息的决策问题,同时提供相关的合理策略方案,具有一定的决策有效性。

## 5 结语

本文探究了如何解决基于区间值犹豫模糊背景的不确定信息的决策问题,同时设计了两种不同的三支决策模型用来减小遇到决策失误而造成损失的风险。首先,根据区间犹豫模糊集和多粒度粗糙集的相关理论知识,构建了乐观和悲观两种不同的区间犹豫模糊多粒度粗糙集。其次,基于区间值犹豫模糊背景以及决策理论粗糙集部分理论知识,设计计算相关条件概率与阈值的新方法。而且,借助将条件概率与阈值进行比较的方式设定出三支决策的有关规则以及相应地如何提取规则的算法。并结合

案例进行实验分析,证实了提出模型的有效性。

在未来的工作中,关于本文提出的决策规则提取算法,我们将考虑通过序贯三支决策相关理论来继续对在边界区域中的对象的具体决策结果进行分析,同时考虑对于不同的粒度应该具有不同的权重值,这样能让最终做出的决策策略相对而言较为准确。

## 参考文献:

- [1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
- [2] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [3] QIAN Y H, ZHANG H, SANG Y L, et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 225-237.
- [4] QIAN Y H, LIANG J Y, DANG C Y. Incomplete multi-granulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 2010, 40(2): 420-431.
- [5] QIAN Y H, LIANG J Y, YAO Y Y, et al. MGRS: a multi-granulation rough set[J]. Information Sciences: an International Journal, 2010, 180(6): 949-970.
- [6] YAO Y Y. Decision-theoretic rough set models[C] // Rough Sets and Knowledge Technology. New York: Springer, 2007: 1-12
- [7] YAO Y Y. Probabilistic rough set approximations[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49(2): 255-271.
- [8] 梁美社, 谷怡欣, 米据生, 等. 基于相似度的直觉模糊多粒度决策理论粗糙集[J]. 模糊系统与数学, 2022, 36(6): 149-160.
- [9] LIANG M S, GU Y X, MI J S, et al. Similarity-measure based intuitionistic fuzzy multigranulation decision-theoretic rough set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2022, 36(6): 149-160.
- [10] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning- I [J]. Information sciences, 1975, 8(3): 199-249.
- [11] YAGER R R. On the theory of bags[J]. International Journal of General Systems, 1986, 13(1): 23-37.
- [12] 孙文鑫. 多粒度广义近似空间的模糊粗糙集[J]. 洛阳师范学院学报, 2023, 42(2): 1-5.

- SUN W X. A fuzzy rough set in multi-granulation generalized approximation space [J]. Journal of Luoyang Normal University, 2023, 42(2): 1-5.
- [12] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [13] 陈树伟, 蔡丽娜. 区间值犹豫模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(6): 38-44.
- CHEN S W, CAI L N. Interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(6): 38-44.
- [14] YE J. Interval-valued hesitant fuzzy prioritized weighted aggregation operators for multiple attribute decision making [J]. Journal of Algorithms & Computational Technology, 2014, 8(2): 179-192.
- [15] TAVAKKOLI-MOGHADDAM R, GITINAVARD H, MOUSAVI S M, et al. An interval-valued hesitant fuzzy TOPSIS method to determine the criteria weights[C] // International Conference on Group Decision and Negotiation. Cham: Springer, 2015: 157-169.
- [16] 阮传扬, 韩莉娜. 考虑区间元素个数的区间犹豫模糊决策方法 [J]. 计算机科学与探索, 2018, 12(9): 1513-1521.
- RUAN C Y, HAN L N. Interval-valued hesitant fuzzy decision making method considering number of interval-valued elements [J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2018, 12(9): 1513-1521.
- [17] 周修亭, 王劭, 朱峰. 基于概率区间对偶犹豫模糊不确定语言优先集结算子的多属性决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2023, 37(3): 118-127.
- ZHOU X T, WANG S, ZHU F. Multi-attribute decision-making method based on probabilistic interval dual hesitant fuzzy uncertain linguistic prioritized aggregation operators [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2023, 37(3): 118-127.
- [18] 鲁小云, 俞惠芳. 区间值犹豫模糊信息系统中的信息熵研究[J]. 小型微型计算机系统, 2017, 38(1): 138-141.
- LU X Y, YU H F. Study of the information entropy in interval-valued hesitant fuzzy information systems [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2017, 38(1): 138-141.
- [19] 范玉蕊, 王惠文. 基于改进犹豫度的区间值犹豫模糊集距离测度及其应用[J]. 海南师范大学学报(自然科学版), 2023, 36(1): 24-28.
- FAN Y R, WANG H W. Interval-valued hesitant fuzzy set distance measure based on improved hesitation degree and its application [J]. Journal of Hainan Normal University (Natural Science), 2023, 36(1): 24-28.
- [20] 王茜, 张贤勇. 不完备邻域加权多粒度决策理论粗糙集及三支决策[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(9): 94-104.
- WANG Q, ZHANG X Y. Incomplete neighborhood weighted multi-granularity decision-theoretic rough sets and three-way decision [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(9): 94-104.
- [21] LIANG D C, LIU D. A novel risk decision making based on decision-theoretic rough sets under hesitant fuzzy information [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(2): 237-247.
- [22] ZHANG Q H, YANG C C, WANG G Y. A sequential three-way decision model with intuitionistic fuzzy numbers[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(5): 2640-2652.
- [23] XU Z S, ZHANG X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information [J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52: 53-64.
- [24] QIAO J S. Hesitant relations: novel properties and applications in three-way decisions[J]. Information Sciences, 2019, 497: 165-188.

〔责任编辑 宋轶文〕