第31卷第2期
2017年4月

模糊系统与数学
Fuzzy Systems and Mathematics

Vol. 31,No. 2
Apr. ,2017

文章编号:1001-7402(2017)02-0164-07

直觉模糊序决策信息系统的分布约简*

桑彬彬,徐伟华

(重庆理工大学 理学院,重庆 400054)

摘 要:本文在直觉模糊决策信息系统中引入直觉模糊序关系,建立了基于直觉模糊序关系的决策信息系统. 然后,基于定义的分布协调集,给出相应分布约简的判定定理和可辨识分布矩阵,从而提供了直觉模糊序决策信息系统的属性约简方法. 最后通过例题验证方法的有效性.

关键词:直觉模糊集;序决策信息系统;分布约简;可辨识分布矩阵

中图分类号:O159 文献标识码:A

1 引言

直觉模糊集的概念是由保加利亚学者 Atanassov 在 1983 年提出的,直觉模糊集理论是传统的模糊集的一种推广,它同时兼容了隶属度和非隶属度以及犹豫度这三个方面的信息。因此,直觉模糊集比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性等方面包含的信息更全面,更实用。自提出以来,有关直觉模糊集理论的研究已受到国内外相关领域学者的高度关注[1],并且已被应用与决策、医疗诊断、逻辑规划、模式识别、机器学习和市场预测等诸多领域[1,4,6,8,10,11]。

粗糙集已经成为人工智能中一个重要的分支,部分学者对其进行了详细的研究和推广,使它能够得到广泛的应用[2,3,5]。知识约简是粗糙集理论中非常重要的内容[7,9,12,15,16]。在实际的知识库中通常会出现这样的情况,删除某些知识,并不削弱知识库的分类能力,这就说明其中有些属性是冗余的,而在知识处理的过程中,这些多余的知识必然产生不必要的计算量。因此,我们自然希望在进行知识处理之前删除这些多余的知识,进而减少计算量。所谓知识约简,就是在不削弱知识库分类能力的前提下,删除其中冗余的属性。通过知识约简去掉不必要的属性,可以使知识表示简化,减少计算量,又不丢失必要信息。目前,许多学者通过不同的方法从不同的角度对知识约简做了深入的研究,并取得了很多成果。

在实际生产中许多信息系统由于各种原因是基于直觉模糊序关系的,而且是不协调的[13]。因此通过定义直觉模糊序关系并应用于决策信息系统中,从而建立直觉模糊序决策信息系统。我们要想从这种复杂的基于直觉模糊序关系的不协调信息系统中获取简洁的不确定性命题,就必须对系统进行知识约简。因而,对于直觉模糊序关系下的不协调决策信息系统知识约简的研究是非常有意义的。为此,本文对这一问题进行了探讨研究,在基于直觉模糊序关系下的不协调目标信息系统中引入了分布约简概念,得到了分布约简的判定定理以及辨识矩阵,建立了直觉模糊序关系下的不协调决策信息系统的分布

* 收稿日期:2016-02-02;修改日期:2016-07-16
基金资助:国家自然科学基金资助项目(61105041,61472463,61402064);重庆市自然科学基金资助项目(cstc2015jcycA1390);重庆市教委科学技术研究项目(KJ201601134471);重庆理工大学研究生创新基金资助项目(YCX2015227,YCX2016227)
作者简介:桑彬彬(1992-),男,硕士研究生,研究方向:人工智能的数学基础;徐伟华(通讯作者)(1979-),男,教授,研究方向:粗糙集理论与应用,不确定性推理。

约简的具体方法，同时通过实例验证了该方法的有效性，从而进一步丰富了粗糙集理论。

2　基于直觉模糊序关系的决策信息系统

决策信息系统是不仅有条件属性而且有决策属性的一种特殊信息系统，决策信息系统研究的主要问题是条件属性和决策属性之间的关系。为了让读者更方便的理解，下面先给出一些相关的基本概念。

定义 2.1[14]　设 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 是一个五元组，被称为决策信息系统，(U,AT,F) 是一个三元组，被称为信息系统，其中 AT 称为条件属性集，D 称为目标属性集，即：

U 是有限对象集，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；

AT 是有限条件属性集，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$；

DT 是有限目标属性集，$DT=\{d_1,d_2,\cdots,d_q\}$；

F 是 U 与 AT 的关系集，$F=\{f_k:U\rightarrow V_k,k\leqslant p\}$，$V_k$ 是 a_k 的有限值域；

G 是 U 与 DT 的关系集，$G=\{g_{k'}:U\rightarrow V'_k,k'\leqslant q\}$，$V'_k$ 是 $d_{k'}$ 的有限值域。

定义 2.2　设 $I=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为决策信息系统. 对任意 $f\in F,g\in G,a\in AT$ 和 $x\in U$ 都有

$$f(x,a)=(\mu_a(x),\nu_a(x)),g(x,d)\in R(R\text{ 为实数集})。$$

其中 $\mu_a:U\rightarrow[0,1]$，$\nu_a:U\rightarrow[0,1]$ 并且满足 $0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant 1$. $\mu_a(x)$ 和 $\nu_a(x)$ 分别称为 $x\in U$ 在条件属性 a 下的隶属度和非隶属度，记 $f(a)=\{f(x,a)\mid a\in AT\}$，称 $f(a)$ 为 U 上的直觉模糊集，$I_*=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊决策信息系统。

下面定义在直觉模糊决策信息系统中条件属性值的序关系和决策属性值的序关系。

定义 2.3　设 $I_*=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊决策信息系统，对任意 $a\in AT,f\in F,g\in G,x_i,x_j\in U$

$$f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a)\Leftrightarrow[\mu_a(x_i)\leqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\geqslant\nu_a(x_j)],$$
$$f(x_i,a)\geqslant f(x_j,a)\Leftrightarrow[\mu_a(x_i)\geqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\leqslant\nu_a(x_j)].$$
$$g(x_i,d)\leqslant g(x_j,d),g(x_i,d)\geqslant g(x_j,d).$$

则 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊序决策信息系统。

由以上四个关系式便可以得到在直觉模糊决策信息系统中条件属性值和决策属性值的递增偏序关系和递减偏序关系。若在某一条件属性下得到的条件属性值域是一个递增偏序或者是一个递减偏序，则称该条件属性为这个直觉模糊决策信息系统的一个准则，同理决策属性同样可以找到相应的准则。由条件属性和决策属性的准则，我们便可以找到由条件属性值域和决策属性值域的递增偏序构成对应的优势关系，那么下面我们仅考虑由递增偏序构成的优势关系的情形，相同考虑递减偏序的情形也可以得到类似的结论。

定义 2.4　设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 直觉模糊序决策信息系统，对于 $A\subseteq AT$，令

$$\begin{aligned}R_A^{\leqslant}&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid x_i\leqslant x_j\}\\&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a),\forall a\in A,f\in F\}\\&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid \mu_a(x_i)\leqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\geqslant\nu_a(x_j),\forall a\in A,f\in F\}.\\R_d^{\leqslant}&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid g(x_i,d)\leqslant g(x_j,d),g\in G\}.\end{aligned}$$

$R_A^{\leqslant}$，$R_d^{\leqslant}$ 称为直觉模糊序决策信息系统的优势关系，此时该决策信息系统称为基于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统，

记：
$$\begin{aligned}[x_i]_A^{\leqslant}&=\{x_j\in U\mid(x_i,x_j)\in R_A^{\leqslant}\}\\&=\{x_j\in U\mid f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a),\forall a\in A,f\in F\}\\&=\{x_j\in U\mid\mu_a(x_i)\leqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\geqslant\nu_a(x_j),\forall a\in A,f\in F\}.\\[x_i]_d^{\leqslant}&=\{x_j\in U\mid g(x_i,d)\leqslant g(x_j,d),\forall g\in G\}.\end{aligned}$$

易见，优势关系有下面性质：

命题 2.1 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 直觉模糊序决策信息系统，$R_A^{\leqslant},R_d^{\leqslant}$ 称为直觉模糊序决策信息系统的优势关系，则以下命题成立。

(1)$R_A^{\leqslant}$ 满足自反性和传递性，未必满足对称性，因而一般不再是等价关系。

(2) 当 $B_1\subseteq B_2\subseteq AT$ 时有：$R_{AT}^{\leqslant}\subseteq R_{B_2}^{\leqslant}\subseteq R_{B_1}^{\leqslant}$.

(3) 当 $B_1\subseteq B_2\subseteq AT$ 时有：$[x_i]_{AT}^{\leqslant}\subseteq[x_i]_{B_2}^{\leqslant}\subseteq[x_i]_{B_1}^{\leqslant}$.

(4) 当 $x_j\in[x_i]_A^{\leqslant}$ 时有：$[x_j]_A^{\leqslant}\subseteq[x_i]_A^{\leqslant}$.

对于任意 $X\subseteq U$，定义 X 关于优势关系下 $R_A^{\leqslant}$ 的下近似和上近似分别为：

$$\underline{R_A^{\leqslant}}(X)=\{x_i\in U:[x_i]_A^{\leqslant}\subseteq X\},\overline{R_A^{\leqslant}}(X)=\{x_i\in U:[x_i]_A^{\leqslant}\cap X\neq\varnothing\}.$$

优势关系下的上、下近似也满足类似于 Pawlak 近似空间中的许多性质，为了叙述方便，下文我们在没有特别说明时直觉模糊序决策信息系统都是指基于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统。

定义 2.5 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊序决策信息系统，若 $R_{AT}^{\leqslant}\subseteq R_d^{\leqslant}$，则称该直觉模糊序决策信息系统是协调的，否则若 $R_{AT}^{\leqslant}\not\subset R_d^{\leqslant}$ 称该系统是不协调的。

例 1 表 1 给出了一个直觉模糊序决策信息系统。$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，$AT=\{a_1,a_2,a_3\}$，d 为决策属性。

表 1 直觉模糊序决策信息系统

$U\times(AT\cup\{d\})$	a_1	a_2	a_3	d
x_1	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.9⟩	3
x_2	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.3,0.6⟩	2
x_3	⟨0.1,0.9⟩	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.1,0.8⟩	1
x_4	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.4,0.6⟩	2
x_5	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.3,0.5⟩	3
x_6	⟨0.4,0.4⟩	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.4,0.3⟩	1

于是，按照优势关系的定义有：

$[x_1]_{AT}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$，$[x_2]_{AT}^{\leqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$，$[x_3]_{AT}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，

$[x_4]_{AT}^{\leqslant}=\{x_4,x_6\}$，$[x_5]_{AT}^{\leqslant}=\{x_5\}$，$[x_6]_{AT}^{\leqslant}=\{x_6\}$.

$[x_1]_d^{\leqslant}=[x_5]_d^{\leqslant}=\{x_1,x_5\}$，$[x_2]_d^{\leqslant}=[x_4]_d^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$，

$[x_3]_d^{\leqslant}=[x_6]_d^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$.

显然，$R_{AT}^{\leqslant}\not\subset R_d^{\leqslant}$. 因此该直觉模糊序决策信息系统不协调的。

3 不协调直觉模糊序决策信息系统的分布约简

因为优势关系不同于等价关系，在对象集上不能形成划分，而是形成一个覆盖。因此，对于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统中不能采取 Pawlak 近似空间下的决策信息系统中的方法定义分布函数和最大分布函数。下面我们给出直觉模糊序决策信息系统的分布函数和最大分布函数的定义方式。

设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊序决策信息系统 $R_A^{\leqslant},R_d^{\leqslant}$ 分别为条件属性集 AT 和决策属性 d 生成的 U 上的优势关系，对于 $A\subseteq AT$，$x\in U$，记

$$U/R_A^{\leqslant}=\{[x_i]_A^{\leqslant}:x_i\in U\},$$

$$U/R_d^{\leqslant}=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\},$$

$$\mu_A(x)=\left(\frac{|D_1\cap[x]_A^{\leqslant}|}{|U|},\frac{|D_2\cap[x]_A^{\leqslant}|}{|U|},\cdots,\frac{|D_r\cap[x]_A^{\leqslant}|}{|U|}\right),$$

$$\gamma_A(x)=\max\left\{\frac{|D_1\cap[x]_A^{\leqslant}|}{|U|},\frac{|D_2\cap[x]_A^{\leqslant}|}{|U|},\cdots,\frac{|D_r\cap[x]_A^{\leqslant}|}{|U|}\right\}.$$

其中$[x]_A^{\leqslant}=\{y\in U:(x,y)\in R_A^{\leqslant}\}$，我们称$\mu_A(x)$为论域$U$上对象$x$关于条件属性子集$A$和决策属性$d$的分布函数，简称分布函数$\gamma_A(x)$为论域$U$上对象$x$的关于条件属性子集$A$和决策$d$的最大分布函数，简称最大分布函数。

定义 3.1　设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$为两个$n$维$n\times 1$向量，若$a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$称向量$\alpha$等于向量$\beta$，记做$\alpha=\beta$；若$a_i\leqslant b_i(i=1,\cdots,n)$称向量$\alpha$小于等于向量$\beta$，记做$\alpha\leqslant\beta$；否则若存在某个$i_0$，$(i_0\in\{1,2,\cdots,n\})$，使得$a_{i_0}>b_{i_0}$，称向量$\alpha$不小于等于向量$\beta$，记做$\alpha\not\leqslant\beta$.

如：$(1,2,3)\not\leqslant(1,1,4)$且$(1,1,4)\not\leqslant(1,2,3)$.

由以上定义可得到如下面命题。

定理 3.1　设$I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统，$A\subseteq AT$.

(1) 当$B\subseteq A$时，对任意的$x\in U$有$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$.

(2) 当$B\subseteq A$时，对任意的$x\in U$有$\gamma_A(x)\leqslant\gamma_B(x)$.

(3) 对$\forall x,y\in U$，当$[y]_A^{\leqslant}\subseteq[x]_A^{\leqslant}$时，有$\mu_A(y)\leqslant\mu_A(x)$.

(4) 对$\forall x,y\in U$，当$[y]_A^{\leqslant}\subseteq[x]_A^{\leqslant}$时，有$\gamma_A(y)\leqslant\gamma_A(x)$.

证明　(1)-(4)由定义 2.4 可得。

定义 3.2　设$I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统。若$\forall x\in U$，$A\subseteq AT$有$\mu_A(x)=\mu_{AT}(x)$，则称$A$是$I_*^{\leqslant}$中关于序关系$R_{AT}^{\leqslant}$的分布相对协调集，简称分布协调集。且$B$的任何真子集不是分布协调集，则称$A$是$I_*^{\leqslant}$中关于序关系$R_{AT}^{\leqslant}$的分布相对约简，简称分布约简。

定义 3.3　设$I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统。若$\forall x\in U$，$A\subseteq AT$有$\gamma_A(x)=\gamma_{AT}(x)$，则称$A$是$I_*^{\leqslant}$中关于序关系$R_{AT}^{\leqslant}$的最大分布相对协调集，简称最大分布协调集，且$A$的任何真子集不是最大分布协调集，则称$A$是$I_*^{\leqslant}$中关于序关系$R_{AT}^{\leqslant}$的最大分布协调约简，简称最大分布约简。

例 2　考虑例 1 给出的不协调直觉模糊序决策信息系统。

若在该信息系统中记：

$$D_1=[x_1]_d^{\leqslant}=[x_5]_d^{\leqslant},D_2=[x_2]_d^{\leqslant}=[x_4]_d^{\leqslant},D_3=[x_3]_d^{\leqslant}=[x_6]_d^{\leqslant},$$

则有：

$$\mu_{AT}(x_1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3});\mu_{AT}(x_2)=(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2});\mu_{AT}(x_3)=(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6});$$

$$\mu_{AT}(x_4)=(0,\frac{1}{6},\frac{1}{3});\mu_{AT}(x_5)=(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6});\mu_{AT}(x_6)=(0,0,\frac{1}{6});$$

$$\gamma_{AT}(x_1)=\frac{2}{3};\gamma_{AT}(x_2)=\frac{1}{2};\gamma_{AT}(x_3)=\frac{5}{6};\gamma_{AT}(x_4)=\frac{1}{3};\gamma_{AT}(x_5)=\frac{1}{6};\gamma_{AT}(x_6)=\frac{1}{6}.$$

若取$A=\{a_2,a_3\}$时，易验证得到$\forall x\in U$有：$[x]_{AT}^{\leqslant}=[x]_A^{\leqslant}$，因此有$\mu_A(x)=\mu_{AT}(x)$和$\gamma_A(x)=\gamma_{AT}(x)$. 故$A=\{a_2,a_3\}$是$A$关于$d$的个分布协调集，也是个最大分布协调集。进而可以验证$\{a_2\}$，$\{a_3\}$均不是分布协调集和最大分布协调集，因此$A=\{a_2,a_3\}$是个分布约简，也是个最大分布约简。

容易验证$A'=\{a_1,a_3\}$和$\{a_1,a_2\}$都不是分布协调集，也不是最大分布协调集，因此该目标信息系统只有一个分布约简，也只有一个最大分布约简，即$\{a_2,a_3\}$.

下面我们具体给出不协调直觉模糊序决策信息系统的分布约简与最大分布约简的关系以及判定定理。

定理 3.2　设$I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A\subseteq AT$则$A$是分布协调集当且仅当$A$是最大分布协调集。

证明 由 $A \subseteq AT$ 可得$[x]_A^{\leqslant} \subseteq [x]_{AT}^{\leqslant}$，又根据分布协调集、最大分布协调集的定义和序关系的定义可得，在直觉模糊序决策信息系统中，如果A为分布协调集，则对 $\forall x \in U$ 一定得到$[x]_A^{\leqslant} = [x]_{AT}^{\leqslant}$；反过来，只有对 $\forall x \in U$ 都满足$[x]_A^{\leqslant} = [x]_{AT}^{\leqslant}$ 才可得到A 为分布协调集。最大分布协调集也是如此，因此可得：

A 是分布协调集 $\Leftrightarrow \forall x \in U, [x]_A^{\leqslant} = [x]_{AT}^{\leqslant} \Rightarrow A$ 是最大分布协调集。

推论 3.1 设 $I_*^{\leqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A \subseteq AT$，则 A 是分布协约简当且仅当 A 一定是最大分布约简。

定理 3.3 设 $I_*^{\leqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A \subseteq AT$，则 A 是分布协调集当且仅当对 $\forall x, y \in U$，当 $\mu_{AT}(y) \not\leqslant \mu_{AT}(x)$ 时有$[y]_A^{\leqslant} \not\subset [x]_A^{\leqslant}$.

证明 "$\Rightarrow$"反证。

假设当 $\mu_{AT}(y) \not\leqslant \mu_{AT}(x)$ 时$[y]_A^{\leqslant} \not\subset [x]_A^{\leqslant}$ 不成立。故此时有$[y]_A^{\leqslant} \subseteq [x]_A^{\leqslant}$，由定理 3.1(3) 知 $\mu_A(y) \leqslant \mu_A(x)$，而 A 又是分布协调集，于是有 $\mu_{AT}(x) = \mu_A(x)$，$\mu_{AT}(y) = \mu_A(y)$. 故有 $\mu_{AT}(y) \leqslant \mu_{AT}(x)$，矛盾。

因此当 $\mu_{AT}(y) \not\leqslant \mu_{AT}(x)$ 时有$[y]_A^{\leqslant} \not\subset [x]_A^{\leqslant}$ 成立。

"$\Leftarrow$" 要证 A 是分布协调集须证明对任意的$x \in U$ 有$\mu_{AT}(x) = \mu_A(x)$. 而由定理 3.1(1) 知，只需证 $\mu_A(x) \leqslant \mu_{AT}(x)$ 即可。

当 $\mu_A(x) = 0$ 时显然成立。下面我们证明 $\mu_A(x) \neq 0$ 时同样成立。

由条件知，对 $\forall x, y \in U$，若$\mu_{AT}(y) \not\leqslant \mu_{AT}(x)$ 时有$[y]_A^{\leqslant} \not\subset [x]_A^{\leqslant}$ 成立。因此对 $\forall x, y \in U$，若$[y]_A^{\leqslant} \subseteq [x]_A^{\leqslant}$ 成立，则 $\mu_{AT}(y) \leqslant \mu_{AT}(x)$ 成立。

另外，当$\dfrac{|D_i \cap [x]_A^{\leqslant}|}{|U|} \neq 0$ 时，便有 $|D_i \cap [x]_A^{\leqslant}| \neq 0$. 不妨设 $y_i \in D_i \cap [x]_A^{\leqslant}$，则

$y_i \in D_i$ 且 $y_i \in [x]_A^{\leqslant}$，故由定理 3.1(4) 知$[y_i]_A \subseteq [x]_A$ 成立。因此可得 $\mu_A(y_i) \leqslant \mu_{AT}(x)$. 又 $y_i \in [y_i]_{AT}^{\leqslant}$，所以 $y_i \in D_i \cap [y_i]_{AT}^{\leqslant}$，即有 $|D_i \cap [x]_A^{\leqslant}| \leqslant |D_i \cap [y_i]_{AT}^{\leqslant}|$.

因此 $\mu_A(x) \leqslant \mu_{AT}(y_i)$，故 $\mu_A(x) \leqslant \mu_{AT}(x)$ 成立。

用同样的方法我们可以得到最大分布协调集的充要条件。

定理 3.4 设 $I_*^{\leqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A \subseteq AT$，则 A 是最大分布协调集当且仅当对 $\forall x, y \in U$，当 $\gamma_A(y) > \gamma_A(x)$ 时有$[y]_A^{\leqslant} \not\subset [x]_A^{\leqslant}$.

证明 用定理 3.1 可得。

4 不协调直觉模糊序决策信息系统的分布约简方法

第三节中的定理给出了不协调直觉模糊序决策信息系统的分布协调集和最大分布协调集的等价刻画，这是判断属性子集是否协调的理论所在，由此我们可进一步得出分布约简和最大分布约简的方法。下面先给出辨识属性矩阵的概念。

定义 4.1 设 $I_*^{\leqslant} = (U, AT, F)$ 为不协调直觉模糊序信息系统，记

$$Dis^{\mu}_{\leqslant AT}(x_i, x_j) = \{a \in AT \mid (x_i, x_j) \notin R_a^{\leqslant}\}.$$

称 $Dis^{\mu}_{\leqslant AT}(x_i, x_j)$ 为 $I^{\leqslant}$ 中 x_i, x_j 关于直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{\leqslant}$ 的分布可辨识属性集。记

$$Dis^{\mu}_{\leqslant AT} = (Dis^{\mu}_{\leqslant AT}(x_i, x_j))_{|U| \times |U|}.$$

称 $Dis^{\mu}_{\leqslant AT}$ 为$I_*^{\leqslant}$ 中x_i, x_j 关于直觉模糊优势关系$R_{AT}^{\leqslant}$ 的分布可辨识矩阵。特别地，对任意 $x_i, x_j \in U$ 有

$$Dis^{\mu}_{\leqslant AT}(x_i, x_i) = \varnothing,$$

$$Dis^{\mu}_{\leqslant AT}(x_i, x_j) \cap Dis^{\mu}_{\leqslant AT}(x_j, x_i) = \varnothing.$$

定理 4.1 设 $I_*^{\leqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A \subseteq AT$，对象关于

$R_{AT}^{\leqslant}$ 的分布可辨识属性集 $Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)$，则

$$R_A^{\leqslant}=R_{AT}^{\leqslant}\Leftrightarrow(Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing)[A\cap Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing].$$

证明　必要性，由 $R_A^{\leqslant}=\bigcap_{a\in A}R_a^{\leqslant}$，对于任意的 $a\in A$，如果 $(x_i,x_j)\notin R_a^{\leqslant}$，则有 $(x_i,x_j)\notin R_A^{\leqslant}$。设 $R_A^{\leqslant}=R_{AT}^{\leqslant}$，由直觉模糊序关系的定义，对任意的 $x_i\in U$，有 $[x_i]_A^{\leqslant}=[x_i]_{AT}^{\leqslant}$.

当 $Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing$ 时，存在 $a\in AT$ 使得 $(x_i,x_j)\notin R_a^{\leqslant}$，由此可以得到 $(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{\leqslant}$，即有 $(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{\leqslant}$. 因而存在 $a'\in A$ 使得 $(x_i,x_j)\notin R_a^{\leqslant}$，于是 $a'\in Dis_{\leqslant A}^{\mu}(x_i,x_j)$，由 $A\subseteq AT$ 及分布可辨识公式定义得 $Dis_{\leqslant A}^{\mu}(x_i,x_j)\subseteq Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)$，因此 $a'\in Dis_{\leqslant A}^{\mu}(x_i,x_j)$. 即证得

$$R_A^{\leqslant}=R_{AT}^{\leqslant}\Leftrightarrow(Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing)[A\cap Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing].$$

充分性，对任意 $(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{\leqslant}$，存在 $a\in AT$ 满足 $(x_i,x_j)\notin R_a^{\leqslant}$，那么 $Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing$. 从而 $A\cap Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\neq\varnothing$. 于是存在 $a\in A$ 使得 $a\in Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)$，即 $a\in A$ 且 $(x_i,x_j)\notin R_a^{\leqslant}$，得到 $(x_i,x_j)\notin R_A^{\leqslant}$，即有

$$(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{\leqslant}\Rightarrow(x_i,x_j)\notin R_A^{\leqslant}.$$

其逆否命题

$$(x_i,x_j)\in R_A^{\leqslant}\Rightarrow(x_i,x_j)\in R_{AT}^{\leqslant}.$$

由此得到 $R_A^{\leqslant}\subseteq R_{AT}^{\leqslant}$. 另一方面由 $A\subseteq AT$ 显然可得 $R_A^{\leqslant}\supseteq R_{AT}^{\leqslant}$，即证得 $R_A^{\leqslant}=R_{AT}^{\leqslant}$.

定义 4.2　设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，辨识矩阵为 $Dis_{\leqslant AT}^{\mu}$. 称

$$M_{\leqslant AT}^{\mu}=\wedge\{\vee\{a\mid a\in Dis_{\leqslant AT}^{\mu}(x_i,x_j)\}\mid\forall x_i,x_j\in U\}.$$

为该不协调直觉模糊序决策信息系统的分布可辨识公式。

定理 4.2　设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，分布辨识公式 $M_{\leqslant AT}^{\mu}$ 的极小析取范式为 $M_{\leqslant min}^{\mu}=\bigvee_{k=1}^{p}(\bigwedge_{s=1}^{q_k}a_s)$，若记 $B_\mu^k=\{a_s,s=1,2,\cdots,q_k\}$，则 $\{B_\mu^k,k=1,2,\cdots p\}$ 是所有分布约简形式的集合。

证明　由定义 4.2 可得。

例 3　对于表 1 给出的为不协调直觉模糊序决策信息系统中的分布函数，而且可以计算：该信息系统的分布辨识矩阵，如下所示。

表 2　不协调直觉模糊序决策信息系统的分布辨识矩阵

$Dis_{\leqslant A}^{\mu}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	a_1a_2	a_1a_2	$\varnothing$	$\varnothing$
x_2	A	$\varnothing$	A	a_1a_2	$\varnothing$	$\varnothing$
x_3	a_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_4	A	a_3	A	$\varnothing$	a_3	$\varnothing$
x_5	A	A	A	A	$\varnothing$	a_2
x_6	A	A	A	A	A	$\varnothing$

故可得：

$$M_{\leqslant AT}^{\mu}=(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)\wedge a_2\wedge a_3=a_2\wedge a_3.$$

因此 $\{a_2,a_3\}$ 是该不协调目标信息系统的所有分布约简而且也是最大分布约简。这与例 2 的结果是一致的。

5　结论

本文是在一个决策信息系统中引入直觉模糊序关系，从而建立一个直觉模糊序决策信息系统，要想

从复杂的基于直觉模糊序关系下的不协调决策信息系统中获取简洁的不确定性命题，就必须对该系统进行知识约简，因此，在直觉模糊序关系下来研究不协调决策信息系统的知识约简是非常重要的。本文在基于直觉模糊序关系下的不协调决策信息系统中引入了分布约简的概念，而且得到了分布约简的判定定理以及辨识矩阵，建立了直觉模糊序关系下不协调决策信息系统的分布约简的具体方法，同时通过实例验证了该方法的有效性。

参考文献：

[1] Vlachos L K, Sergiadis G D. Intuitionistic fuzzy information: Applications to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(2): 180～210.

[2] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. A new rough set approach to multicriteria and multiattribute classificatioin// Polkowsik L, Skowron A, ed. Rough sets and current trends in computing (RSCTC'98). Lecture Notes in Artificial Intelligence, 1998, 1424: 50～70.

[3] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation of a preference relation by dominance relation. Europe Journal of Operation Research, 1999, 117: 50～90.

[4] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough set theory for multicriteria decision analysis. Europe Journal of Operation Research, 2001, 129: 10～50.

[5] Pawlak Z. Rough Sets. Communication of the ACM, 1995, 38(1): 89～95.

[6] 王国胤. Rough 集理论与知识获取. 西安：西安交通大学出版社，2001.

[7] 徐伟华，张文修. 基于优势关系下不协调目标信息系统的分布约简. 模糊系统与数学，2007，21：124～131.

[8] 苗夺谦，王珏. 基于粗糙集的多变量决策树构造方法. 软件学报，1997，8(6)：425～431.

[9] 米据生，吴伟志，张文修. 不协调目标信息系统知识约简的比较研究. 模糊系统与数学，2003，17(3)：54～60.

[10] 王珏，苗夺谦，周育健. 关于 Rough Set 理论与应用的综述. 模式识别与人工智能，1996，9(4)：337～344.

[11] 张文修，梁怡，吴伟志. 信息系统与知识发现. 北京：科学出版社，2003.

[12] 张文修，米据生，吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简. 计算机学报，2003，26(1)：12～18.

[13] 徐伟华，张文修. 基于优势关系下协调近似空间. 计算机科学，2005，32(9)：164～165.

[14] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集. 北京：科学出版社，2013.

[15] 徐伟华，张文修. 基于优势关系下不协调目标信息系统的知识约简. 计算机科学，2006，33(2)：182～184.

[16] 张小红，裴道武，代建华. 模糊数学与 Rough 集理论. 北京：清华大学出版社，2013.

Distribution reduction in an intuitionistic fuzzy ordered decision information system

SANG Bin-bin, XU Wei-hua

(School of Sciences, Chongqing University of Technology, 400054)

Abstract: In this paper, the intuitionistic fuzzy ordered relation is introduced in the intuitionistic fuzzy decision information system. And the decision information system is established based on above the intuitionistic fuzzy ordered relation. The appropriate judgment theorem and the distribution matrix about the distribution reduction are given based on the defined distributed coordination set. Moreover, the distribution reduction method is provided in the intuitionistic fuzzy ordered decision information system. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by the given case.

Key words: Intuitionistic fuzzy set; Ordered decision information system; Distribution reduction; Recognizable distribution matrix