直觉模糊序信息系统下变精度与程度的"逻辑且"粗糙集

胡 猛 李蒙蒙 徐伟华

(重庆理工大学理学院 重庆 400054)

摘 要 通过综合考虑集合中元素的隶属度、非隶属度和犹豫度,定义了直觉模糊信息系统的加权得分函数。基于此得分函数,定义了直觉模糊信息下的优势关系,运用"逻辑且"的方式将变精度粗糙集和程度粗糙集结合起来定义了"逻辑且"粗糙集模型,并研究了其相关性质。最后,通过实例分析进一步体现了该研究的意义,为序信息系统的知识表示提供了新的理论基础。

关键词 变精度粗糙集,程度粗糙集,逻辑且,直觉模糊序信息系统

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.05.037

Rough Set Based on "Conjunctive Logic" Operation of Variable Precision and Grade in Intuitionistic Fuzzy Ordered Information System

HU Meng LI Meng-meng XU Wei-hua

(School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract In this paper, the weighted score function of intuitionistic fuzzy information system is defined by the comprehensive consideration of the membership degree, non-membership degree and hesitation degree of the element with respect of the set. Based on the score function, the dominance relation of intuitionistic fuzzy information is defined. Variable precision rough set and graded rough set are combined with "conjunctive logic" mode, and then the definition of the "conjunctive logic" rough set model is constructed and its properties are deeply explored. Finally, the analysis of practical example further reflects the significance of this study, which provides a new theoretical foundation for knowledge representation in ordered information systems.

Keywords Variable precision rough set, Graded rough set, Conjunctive logic, Intuitionistic fuzzy order information system

1 引言

粗糙集理论是由波兰华沙理工大学 Pawlak 教授于 20 世纪 80 年代初提出的一种研究不完整、不确定知识以及数据表达、学习、归纳的理论方法[1-3]。经典粗糙集理论是基于对象的属性值之间的不可分辨关系,处理的数据表中的对象的属性值一般为离散值的情形。为了适应不确定数据的情形,许多学者近些年在粗糙集模型推广方面进行了很多研究[4-8],然而,在许多实际情况下,需要考虑有关属性值之间有偏好顺序的准则。文献[9-12]提出的基于优势关系的粗糙集方法为解决具有偏好信息的多属性决策问题提供了有效的解决方法。文献[13]提出的考虑隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个方面信息的直觉模糊集,比传统的模糊集更具有客观性与真实性。本文将变精度粗糙集与程度粗糙集这两种各具优点的粗糙集通过"逻辑且"的方式结合起来引入到序信息系统中,在建立新的模型的同时,还深入研究了其数学性质。最后,通过案例分析来展现本文的应用价值。

2 预备知识

本节主要介绍变精度粗糙集$(U,\overline{R_\beta},\underline{R_\beta})$、程度粗糙集$(U,\overline{R_k},\underline{R_k})$、直觉模糊信息系统以及序信息系统 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 的基本知识,为建立新的"逻辑且"粗糙集模型$(U,\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}},\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}})$提供理论基础。

2.1 变精度粗糙集

设(U,R)为近似空间,其中论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是非空有限对象集,R 为 U 上的等价关系。$c([x]_R,X)=1-\frac{|[x]_R\cap X|}{|[x]_R|}$表示等价类$[x]_R$关于集合 X 的错误分类率,其中$|[x]_R|$表示等价类$[x]_R$的基数,可调错误分类水平 $\beta\in[0,0.5]$,$1-\beta$为精度。对$\forall X\subseteq U$,集合$\overline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R|c([x]_R,$

到稿日期:2016-04-12 返修日期:2016-06-29 本文受国家自然科学基金(61472463,61402064),重庆市自然科学基金(cstc2015jcyjA1390),重庆市研究生科技创新项目(CYS16217),重庆理工大学研究生创新基金(YCX2015227,YCX2016227)资助。

胡 猛(1991-),男,硕士生,主要研究方向为人工智能的数学基础,E-mail:914482467@qq.com;李蒙蒙(1991-),男,硕士生,主要研究方向为人工智能的数学基础;徐伟华(1979-),男,博士,教授,主要研究方向为粗糙集理论与应用、不确定性推理,E-mail:chxuwh@gmail.com(通信作者)。

$X)<1-\beta\}$ 和集合 $\underline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R \mid c([x]_R,X)\leqslant\beta\}$ 分别被称为集合 X 的精度 $1-\beta$ 的上近似集和下近似集。

注:如果将变精度粗糙集模型中 β 的值限定在 $(0.5,1]$ 间,则上近似中的 $1-\beta$ 为 β,下近似中的 β 为 $1-\beta$。

由于参数 β 在区间 $(0,0.5]$ 和 $(0.5,1]$ 上具有很强的对称性,因此本文将 β 的值限定为 $(0.5,1]$,$\beta\in(0,0.5]$ 的相关结论可以类似得到。

$\overline{R_\beta}X$ 是关于集合 X 的错误分类率小于 $1-\beta$ 的等价类的并集,$\underline{R_\beta}X$ 是关于集合 X 的错误分类率不大于 β 的等价类的并集。若 $\overline{R_\beta}X\neq\underline{R_\beta}X$,则称 X 在精度 $1-\beta$ 下是 R 粗糙的,否则称 X 在精度 $1-\beta$ 下是 R 精确的。

2.2 程度粗糙集

设 (U,R) 为近似空间,其中论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是非空有限对象集,R 为 U 上的等价关系。对 $\forall X\subseteq U$ 和非负整数 k,集合 $\overline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R \mid |[x]_R\cap X|>k\}$ 和集合 $\underline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R \mid |[x]_R|-|[x]_R\cap X|\leqslant k\}$ 分别表示 X 关于近似空间 (U,R) 的依程度 k 的上、下近似集。$\overline{R_k}X$ 由等价类 $[x]_R$ 与 X 的交集的个数多于 k 的所有等价类构成,$\underline{R_k}X$ 由等价类 $[x]_R$ 不属于 X 的元素的个数最多只有 k 的所有等价类构成。若 $\overline{R_k}X\neq\underline{R_k}X$,则称 X 依程度 k 是 R 粗糙的,否则称 X 依程度 k 是 R 精确的。

2.3 直觉模糊信息系统

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个非空有限经典集合,集合 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 被称为 U 上的一个直觉模糊集,其中 $\mu_A:U\to[0,1]$ 是 U 中元素对于集合 A 的隶属度;$\nu_A:U\to[0,1]$ 是 U 中元素对于集合 A 的非隶属度,并且 $\forall x\in U$,有 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant1$。$\pi_A:U\to[0,1]$ 表示 U 中元素对于集合 A 的犹豫度,并且 $\forall x\in U$,满足 $\pi_A(x)+\mu_A(x)+\nu_A(x)=1$。三元组 $I=(U,AT,F)$ 被称为一个直觉模糊信息系统,其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为有限对象集,$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为有限属性集,$F=\{f:U\to V_{\mu_a}\times V_{\nu_a} \mid a\in AT\}$ 为 U 与 AT 的关系集,V_{μ_a} 和 V_{ν_a} 分别表示属性 a 的隶属度值域和非隶属度值域。

2.4 序信息系统

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为有限非空对象集,$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为条件属性集,$F=\{f:U\to V \mid a\in AT\}$ 是 U 与 AT 之间的关系集,$V=\bigcup_{a\in AT}V_a$,V_a 为 a 的有限值域。称四元组 $I=(U,AT,V,F)$ 为信息系统。

在信息系统 $I=(U,AT,V,F)$ 中,若属性 a 的值域上存在偏序关系"$\geqslant_a$",则称 a 为一个准则。如果信息系统 I 中所有的属性都为准则,那么称该信息系统为一个序信息系统,记为 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$,简记为 $I^{\geqslant}=(U,AT)$。在序信息系统 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 中,$\forall x,y\in U$,$x\geqslant_a y$ 表示对象 x 在准则 a 下至少和对象 y 一样好,而且 $x\geqslant_a y$ 等价于 $f(x,a)\geqslant_a f(y,a)$。$\forall B\subseteq A,B\neq\emptyset$,$x\geqslant_B y$ 表示对象 x 关于准则集 B 优于对象 y。属性集 B 的优势关系定义为 $R_B^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U \mid f(x,a)\geqslant_a f(y,a),\forall a\in B\}$,$B$ 的优势类为 $[x]_B^{\geqslant}=\{y\in U \mid (x,y)\in R_B^{\geqslant}\}=\{y\in U \mid f_l(x)\leqslant f_l(y),\forall a_l\in B\}$。

在序信息系统 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 中,$\forall X\subseteq U$,X 的 $A^{\geqslant}$ 上近似、下近似、正域、负域、上边界域、下边界域和边界域分别定义为:

$$\overline{A^{\geqslant}}(X)=\bigcup\{[x]_A^{\geqslant} \mid [x]_A^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$$

$$\underline{A^{\geqslant}}(X)=\bigcup\{[x]_A^{\geqslant} \mid [x]_A^{\geqslant}\subseteq X\}$$

$$posA^{\geqslant}(X)=\underline{A^{\geqslant}}(X)$$

$$negA^{\geqslant}(X)=\sim\overline{A^{\geqslant}}(X)$$

$$UbnA^{\geqslant}(X)=\overline{A^{\geqslant}}(X)-\underline{A^{\geqslant}}(X)$$

$$LbnA^{\geqslant}(X)=\underline{A^{\geqslant}}(X)-\overline{A^{\geqslant}}(X)$$

$$bnA^{\geqslant}(X)=UbnA^{\geqslant}(X)\cup LbnA^{\geqslant}(X)$$

若 $\overline{A^{\geqslant}}X\neq\underline{A^{\geqslant}}X$,则称 X 在序信息系统下是 $A^{\geqslant}$ 粗糙的;否则称 X 在序信息系统下是 $A^{\geqslant}$ 精确的。

3 直觉模糊序信息系统下基于变精度与程度"逻辑且"粗糙集

基于预备知识中变精度、程度粗糙集和直觉模糊信息系统以及序信息系统的基本知识,本节在直觉模糊信息系统中,通过考虑变精度与程度的逻辑组合,提出了直觉模糊序信息系统的变精度与程度"逻辑且"粗糙集模型,并对其粗糙区域和重要性质进行了深入的研究。

定义1 设 $I=(U,AT,F)$ 为一个直觉模糊信息系统,$\forall x\in U,\forall a\in AT$,定义对象 x 对属性 a 的加权得分函数,

$$S_a(x)=\omega_1\mu_a(x)-\omega_2\nu_a(x)-\omega_3\pi_a(x)$$

其中,$\mu_a(x)$ 和 $\nu_a(x)$ 分别表示对象 x 对属性 a 的隶属度和非隶属度,且满足 $0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant1$;$\pi_a(x)=1-\mu_a(x)-\nu_a(x)$ 表示对象 x 对属性 a 的犹豫度。加权系数满足 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=1(0\leqslant\omega_i\leqslant1,i=1,2,3)$。

注:ω_1 为隶属度的权重,当得分评价越看重隶属度时,ω_1 的取值越大,特别当 $\omega_1=0$ 时,表示评价只考虑非隶属度和犹豫度;ω_2 为非隶属度的权重,当得分评价越看重非隶属度时,ω_2 的取值越大,特别当 $\omega_2=0$ 时,表示评价只考虑隶属度和犹豫度;$\omega_3=1-\omega_1-\omega_2$ 为犹豫度的权重,当得分评价越看重犹豫度时,ω_3 的取值越大,特别当 $\omega_1+\omega_2=1$ 即 $\omega_3=0$ 时,表示评价只考虑隶属度和非隶属度,不考虑犹豫度。因此在进行得分评价时,应根据实际需求给出相应的权重。由于 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$,因此在取值时只需给出 ω_1 和 ω_2,并且保证 $\omega_1+\omega_2\leqslant1$。

定义2 设 $I=(U,AT,F)$ 为一个直觉模糊信息系统,$\forall x\in U,\forall a\in AT$,根据加权得分函数,属性 a 的值域上存在着递增偏序关系"$\geqslant_a$"或递减偏序关系"$\leqslant_a$",故称 a 为一个准则。若直觉模糊信息系统 I 中所有的属性都为准则,则称该信息系统为一个直觉模糊序信息系统,记为 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$。

在直觉模糊序信息系统中,$\forall x\in U,\forall A\subseteq AT,A\neq\emptyset$,定义属性集 A 的优势关系为 $R_A^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U \mid S_a(x)\geqslant S_a(y),\forall a\in A\}$,且属性集 A 的优势类定义为 $[x]_A^{\geqslant}=\{y\in U \mid (y,x)\in R_A^{\geqslant}\}=\{y\in U \mid S_a(y)\geqslant S_a(x),\forall a\in A\}$。其中 $S_a(x)=\omega_1\mu_a(x)-\omega_2\nu_a(x)-\omega_3\pi_a(x)$ 是对象 x 对属性 a 的加权得分。

定义 3 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为直觉模糊序信息系统，对 $\forall X\subseteq U,A\subseteq AT$，$X$ 在直觉模糊序信息系统下的精度为 $1-\beta$，程度为 k 的"逻辑且"上、下近似集分别定义为：

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x|c([x]_A^{\geqslant},X)<1-\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>k\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x|c([x]_A^{\geqslant},X)\leqslant\beta,|[x]_A^{\geqslant}|-|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\}$

若 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\neq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，则称 X 在直觉模糊序信息系统下依精度 $1-\beta$ 与程度 k 是"逻辑且"粗糙的；否则称 X 依精度 $1-\beta$ 与程度 k 是"逻辑且"精确的。相应地，X 的正域、负域、上边界域、下边界域和边界域为：

$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$

$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\sim(\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cup\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X))$

$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)-\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$

$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)-\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$

$bnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\cup LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$

定理 1 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为直觉模糊序信息系统，对 $\forall X\subseteq U,A\subseteq AT,\beta\in[0,1],k\in N$，有以下结论成立：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$；

(2) $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)\cap\underline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$。

证明：(1) 对 $\forall x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)$，有 $c([x]_A^{\geqslant},X)<1-\beta$ 和 $|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>k$，即 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)$ 且 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$。所以 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$。另外，$\forall x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$，有 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)$ 和 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$，即 $c([x]_A^{\geqslant},X)<1-\beta$ 和 $|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>k$，于是有 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$。综上所述，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$。

(2) 证明方法与 (1) 类似。

特别地：当 $\beta=0,k=0$ 时，$\overline{R^{\geqslant}}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{0\wedge 0}}(X)$，$\underline{R^{\geqslant}}(X)=\underline{R_{0\wedge 0}}(X)$；

当 $\beta\neq 0,k=0$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge 0}}(X)$，$\underline{R^{\geqslant}}(X)=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge 0}}(X)$；

当 $\beta=0,k\neq 0$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)=\overline{R^{\geqslant}_{0\wedge k}}(X)$，$\underline{R^{\geqslant}}(X)=\underline{R^{\geqslant}_{0\wedge k}}(X)$；

当 $\beta=1,k\neq 0$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{k}}(X)=\underline{R^{\geqslant}_{1\wedge k}}(X)$；

当 $\beta=1,k=0$ 时，$\underline{R^{\geqslant}}(X)=\underline{R^{\geqslant}_{1\wedge 0}}(X)$。

定理 2 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为直觉模糊序信息系统，对 $\forall X\subseteq U,A\subseteq AT,\beta\in[0,1],k\in N$，有：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\cup UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$；

(2) $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\cup LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$。

证明：由定义 3 可以直接得到。

定理 3 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为直觉模糊序信息系统，对 $\forall X\subseteq U,A\subseteq AT,\beta\in[0,1],k\in N$，有：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x||[x]_A^{\geqslant}\cap X|>\max(k,\beta|[x]_A^{\geqslant}|)\}$；

(2) $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x||[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant\max(|[x]_A^{\geqslant}|-k,|[x]_A^{\geqslant}|-\beta|[x]_A^{\geqslant}|)\}$。

证明：(1) 由定义 3 知：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x|c([x]_A^{\geqslant},X)<1-\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>k\}$。由 $c([x]_A^{\geqslant},X)=1-|[x]_A^{\geqslant}\cap X|/|[x]_A^{\geqslant}|<1-\beta$，有 $|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>\beta|[x]_A^{\geqslant}|$。故 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x||[x]_A^{\geqslant}\cap X|>\max(k,\beta|[x]_A^{\geqslant}|)\}$。

(2) 同理可得。

定理 4 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为直觉模糊序信息系统，对 $\forall X\subseteq U,A\subseteq AT,\beta\in[0,1],k\in N$，有下列结论成立：

(1) 当 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq 0$ 时，有：

$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\geqslant k/\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant|[x]_A^{\geqslant}|-k\})\cup(\{x|k/(1-\beta)<|[x]_A^{\geqslant}|<k/\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|\})\cup(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant k)$

$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\geqslant k/\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant\beta|[x]_A^{\geqslant}|\})\cup(\{x|k/(1-\beta)<|[x]_A^{\geqslant}|<k/\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\})\cup(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]_A^{\geqslant}\cap X|<(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|\})$

$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\geqslant k/\beta,\beta|[x]_A^{\geqslant}|<|[x]_A^{\geqslant}\cap X|<|[x]_A^{\geqslant}|-k\})\cup(\{x|k/(1-\beta)<|[x]_A^{\geqslant}|<k/\beta,k<|[x]_A^{\geqslant}\cap X|<(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|\})$

$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\{x||[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/(1-\beta),(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\}$

(2) 当 $0.5\leqslant\beta<1$ 且 $k\neq 0$ 时，有：

$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=(\{x||[x]_A^{\geqslant}|>k/1-\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant|[x]_A^{\geqslant}|-k\})\cup(\{x|k/\beta<|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/1-\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>\beta|[x]_A^{\geqslant}|\})\cup(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>k\})$

$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=(\{x||[x]_A^{\geqslant}|>k/(1-\beta),|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant\beta|[x]_A^{\geqslant}|\})\cup(\{x|k/\beta<|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]_A^{\geqslant}\cap X|<|[x]_A^{\geqslant}|-k\})\cup(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/\beta,|[x]_A^{\geqslant}\cap X|<(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|\})$

$UbnR^{\geqslant}_{\beta\vee k}(X)=\{x||[x]_A^{\geqslant}|>k/(1-\beta),\beta|[x]_A^{\geqslant}|<|[x]_A^{\geqslant}\cap X|<|[x]_A^{\geqslant}|-k\}$

$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=(\{x|k/\beta<|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]_A^{\geqslant}|-k\leqslant|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant\beta|[x]_A^{\geqslant}\})\cup(\{x||[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/\beta,(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\})$

证明：由 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq 0$，可得 $\beta<1-\beta,k/(1-\beta)<k/\beta$。

(1) 当 $k/(1-\beta)<|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k/\beta$ 时，有 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Leftrightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$ 和 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Leftrightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)$ 以及 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Rightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$，故当 $|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant(1-\beta)|[x]_A^{\geqslant}|$ 时，有 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$，则 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$；

(2) 当 $|[x]_A^{\geqslant}|\leqslant k(1-\beta)$ 时，有 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Leftrightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$ 和 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Leftrightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)$ 以及 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Rightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$，故当 $|[x]_A^{\geqslant}\cap X|\geqslant k$ 时，有 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$，则 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$；

(3) 当 $|[x]_A^{\geqslant}|>k/\beta$ 时，有 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Leftrightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(X)$，$[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Leftrightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}(X)$ 以及 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\Rightarrow[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$，故当 $|[x]_A^{\geqslant}\cap X|>|[x]_A^{\geqslant}|-k$ 时，有 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$，则 $[x]_A^{\geqslant}\subseteq posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$。

其他对应的区域，以及当 $0.5\leqslant\beta<1$ 且 $k\neq 0$ 时的情形可以类似地得到。

定理 5 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为直觉模糊序信息系统，对

$\forall X,Y\subseteq U,A\subseteq AT,\alpha,\beta\in[0,1],k,l\in \mathrm{N}$ 有下列结论成立：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}\emptyset=\emptyset,\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}U=U$；当 $\beta=1$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}\emptyset=\underline{R^{\geqslant}_{k}}\emptyset=\{x\mid |[x]^{\geqslant}_{A}|\leqslant k\},\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}U=\emptyset$；当 $\beta\neq 1$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}\emptyset=\underline{R^{\geqslant}_{k}}\emptyset,\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}U=\overline{R^{\geqslant}}U=\{x\mid |[x]^{\geqslant}_{A}|>k\}$；

(2) 若 $X\subseteq Y$，则 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(Y),\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(Y)$；

(3) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cup Y)\supseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cup\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(Y),\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cup Y)\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cup\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(Y)$；

(4) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cap Y)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(Y),\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cap Y)\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(Y)$；

(5) 若 $\beta\geqslant\alpha,k\geqslant l$，有 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge l}}(X),\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge k}}(X),\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge l}}(X),\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge l}}(X),\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge k}}(X),\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge l}}(X)$；

(6) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X),\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)$。

证明：(1)－(5)容易得证。

(6)要证明该定理，需要引入 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)$ 和 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)$ 的定义，类似于该粗糙集的定义方式，其具体定义如下：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)=\{x\mid c([x]^{\geqslant}_{A},X)<1-\beta\text{ 或 }|[x]^{\geqslant}_{A}|>k\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x\mid c([x]^{\geqslant}_{A},X)\leqslant\beta\text{ 或 }|[x]^{\geqslant}_{A}|-|[x]^{\geqslant}_{A}\cap X|\leqslant k\}$$

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(\sim X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(\sim X)=(\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X)\cap(\sim\underline{R^{\geqslant}_{k}}X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$。同理可以得到：$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(X)$。

4　算法设计

为了验证本文所提出的定义与定理的有效性，设计了相应的算法来计算 X 的上、下近似集与正、负域以及上、下边界域和边界域。其中，算法 1 是计算直觉模糊序信息系统的“逻辑且”上、下近似；算法 2 是计算直觉模糊序信息系统中 X 的“逻辑且”正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

算法 1　计算直觉模糊序信息系统的上、下近似。

输入：$\beta,k,\omega_1,\omega_2$，X 和 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$。

输出：X 的上近似 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 和下近似 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$。

1. begin
2. 　初始化 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\leftarrow\emptyset$ 和 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\leftarrow\emptyset$//初始化上、下近似为空集。
3. 　for each $x\in U$
4. 　　for each $a\in AT$
5. 　　　$S_a(x)=\omega_1\mu_a(x)-\omega_2\nu_a(x)-\omega_3\pi_a(x)$//计算对象 x 在属性 a 下的得分。
6. 　　end
7. 　end
8. 　for each $x\in U$
9. 　　$[x]^{\geqslant}_{AT}\leftarrow\emptyset$//在求解对象 x 的优势类之前将其初始化为空集。
10. 　　for each $o\in U$
11. 　　　flag←true// flag 为判断对象 o 是否优于对象 x 的临时标记。
12. 　　　for each $a\in AT$
13. 　　　　if $(S_a(x)>S_a(o))$//如果 o 在 a 下的得分小于 x，则 $o\notin[x]^{\geqslant}_{AT}$。
14. 　　　　　flag←false//表示对象 o 在准则 a 下不优于对象 x。
15. 　　　　　break//对象 o 在准则 AT 下不优于对象 x，结束循环。
16. 　　　　end
17. 　　　end
18. 　　　if (flag)//若 flag 为 true，则表示 o 在准则 AT 下优于 x。
19. 　　　　$[x]^{\geqslant}_{AT}\leftarrow[x]^{\geqslant}_{AT}\cup\{o\}$//保存对象 x 的优势类。
20. 　　　end
21. 　　end
22. 　　if $(c([x]^{\geqslant}_{AT},X)<1-\beta$ and $|[x]^{\geqslant}_{AT}\cap X|>k)$ //上近似的“逻辑且”的判断。
23. 　　　$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\leftarrow\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cup\{x\}$//保存 X 的“逻辑且”上近似集。
24. 　　end
25. 　　if $(c([x]^{\geqslant}_{AT},X)\leqslant\beta$ and $|[x]^{\geqslant}_{AT}|-|[x]^{\geqslant}_{AT}\cap X|\leqslant k)$ //下近似的“逻辑且”的判断。
26. 　　　$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\leftarrow\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)\cup\{x\}$//保存 X 的“逻辑且”下近似集。
27. 　　end
28. 　end
29. 　return $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 和 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$//返回 X 的“逻辑且”上、下近似集。
30. end

在算法 1 中，第 2 步初始化 X 的“逻辑且”上、下近似集为空集；第 3－7 步计算论域 U 上所有的对象在属性集 AT 下的得分；第 8－28 步求解“逻辑且”的上、下近似，其中第 10－21 步求解对象 x 的优势类，第 22－24 步求解 X 的“逻辑且”上近似，第 25－27 步求解 X 的“逻辑且”下近似；第 29 步返回 X 的“逻辑且”上近似和下近似。

下面对算法 1 的时间复杂度进行分析。第 2 步的时间复杂为 O(1)，第 3－第 7 步的时间复杂度为 $O(|U|\times|AT|)$，第 8－第28 步的时间复杂度为 $O(|U|^2\times|AT|)$，第 29 步的时间复杂度为 O(1)。故整个算法的时间复杂度为 $O(|U|^2\times|AT|)$。

算法 2　直觉模糊序信息系统 X 中的正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

输入：X 的上近似 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$、下近似 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 和论域 U。

输出：$psoR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$，$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$，$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$，$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$ 和 $bnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$。

1. begin
2. 　初始化 $psoR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\leftarrow\emptyset,negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\leftarrow\emptyset,UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\leftarrow\emptyset$，
3. 　　$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\leftarrow\emptyset$ 和 $bnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\leftarrow\emptyset$
4. 　for each $x\in U$
5. 　　flag1←true // flag1 为判断对象 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 的临时标记。
6. 　　flag2←true// flag2 为判断对象 $x\in\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 的临时标记。
7. 　　if $(x\notin\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X))$//此步骤是为了减少重复判断 x 是否属于 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 的次数。
8. 　　　flag1←false //对象 $x\notin\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$
9. 　　end
10. 　　if $(x\notin\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X))$ //此步骤是为了减少重复判断 x 是否属于 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$ 的次数。
11. 　　　flag2←false//对象 $x\notin\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)$。
12. 　　end
13. 　　if (flag1 and flag2)
14. 　　　//$psoR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\leftarrow posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)\cup\{x\}$//保存 X 的正域集。
15. 　　end

16. if (~flag1 and ~flag2)//~表示命题的否,即命题的非。
17. $\mathrm{negR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \leftarrow \mathrm{negR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \cup \{x\}$//保存 X 的负域
18. end
19. if (flag1 and ~flag2)
20. $\mathrm{UbnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \leftarrow \mathrm{UbnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \cup \{x\}$//保存 X 的上边界域。
21. end
22. if (~flag1 and flag2)
23. $\mathrm{LbnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \leftarrow \mathrm{LbnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \cup \{x\}$//保存 X 的下边界域。
24. end
25. if (flag1≠flag2)//≠表示 flag1 与 flag2 的真假值互异时为真,否则为假。
26. $\mathrm{bnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \leftarrow \mathrm{bnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X) \cup \{x\}$//保存 X 的边界域。
27. end
28. end
29. return $\mathrm{psoR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$, $\mathrm{netR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$, $\mathrm{UbnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$, $\mathrm{LbnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$ 和 $\mathrm{bnR}^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)$
30. end

在算法 2 中,第 2 步和第 3 步初始化 X 的"逻辑且"正域、负域、上边界域、下边界域和边界域为空集。第 4—28 步为循环论域 U 计算 X 的"逻辑且"正域、负域、上边界域、下边界域和边界域,其中第 5—6 步分别初始化对象 x 默认属于"逻辑且"上近似和下近似;第 7—9 步判断对象 x 是否属于"逻辑且"上近似,若属于,则更新 flag1 的值为 false,否则 flag1 的值仍然为 true;第 10—12 步判断对象 x 是否属于"逻辑且"下近似,并用同样的方法更新 flag2 的值;第 5—12 步是为了减少后面重复判断对象 x 是否属于"逻辑且"上近似和下近似的次数。第 13—15 步判断对象 x 是否属于 X 的"逻辑且"正域,若属于,则更新正域;第 16—18 步判断对象 x 是否属于 X 的"逻辑且"负域,若属于,则更新负域;第 19—21 步判断对象 x 是否属于 X 的"逻辑且"上边界域,若属于,则更新上边界域;第 22—24 步判断对象 x 是否属于 X 的"逻辑且"下边界域,若属于,则更新下边界域;第 25—28 步判断对象 x 是否属于 X 的"逻辑且"边界域,若属于,则更新边界域;第 29 步返回 X 的"逻辑且"正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

下面对算法 2 的时间复杂度进行分析,第 2—3 步的时间复杂度为 $O(1)$;第 7—12 步的时间复杂度在最好的情况下为 $O(1)$,在最坏的情况下为 $O(|U|)$,所以第 4—28 步的时间复杂度在最好的情况下为 $O(|U|)$,最坏的情况下为 $O(|U|^2)$;第 29 步的时间复杂度为 $O(1)$。因此整个算法的时间复杂度在最坏的情况下为 $O(|U|^2)$。

5 案例分析

某公司董事会有 20 名成员,现进行董事会主席选举,已经入围的有 5 人,分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,但主席仅有一个名额。20 名董事会成员对入围的 5 个人的赞成、反对、弃权的投票结果如表 1 所列。表 1 中的直觉模糊数可通过董事会投票的形式来获取,如董事会成员 x_1 对于候选人 a_4 的隶属度与非隶属度可通过下面的方法来确定:10 位董事会成员对候选对象 a_4 进行投票,假设有 4 票赞成该候选人,5 票不赞成该候选人,1 票弃权即有 1 位成员在赞成与反对之间持犹豫意见,这时认为董事会成员 x_1 对候选人 a_4 的隶属度为 0.4,非隶属度为 0.5,而犹豫度为 0.1,记作 $f(x_1,a_4)=\langle 0.4,0.5\rangle$;其他的直觉模糊数类似可得。

表 1 董事会成员对候选者投票的隶属度与非隶属度

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.7,0.1⟩
x_2	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.7,0.3⟩
x_3	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.7,0.3⟩
x_4	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.8,0.2⟩
x_5	⟨0.7,0.3⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.9,0.1⟩	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.8,0.1⟩
x_6	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.5,0.5⟩	⟨0.8,0.2⟩
x_7	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.8,0.2⟩
x_8	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.9,0.1⟩	⟨0.7,0.3⟩	⟨0.8,0.2⟩
x_9	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.7,0.3⟩	⟨0.9,0.1⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.9,0.0⟩
x_{10}	⟨0.7,0.3⟩	⟨0.7,0.3⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.9,0.0⟩	⟨0.4,0.5⟩
x_{11}	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.5,0.0⟩
x_{12}	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.7,0.0⟩	⟨0.7,0.1⟩
x_{13}	⟨0.2,0.7⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.4,0.4⟩
x_{14}	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.3,0.6⟩
x_{15}	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.2,0.0⟩	⟨0.7,0.0⟩
x_{16}	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.5,0.3⟩	⟨0.5,0.0⟩
x_{17}	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.6,0.4⟩
x_{18}	⟨0.6,0.4⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.5,0.2⟩
x_{19}	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.6,0.1⟩
x_{20}	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.3,0.7⟩

这里用隶属度权重 ω_1 和非隶属度权重 ω_2 分别表示满意程度和不满意程度的权重,ω_1 和 ω_2 根据不同的需求来设置。一般而言,人们往往更看中满意程度,对于不满意程度和犹豫度往往不太看重,所以本文设置 $\omega_1=0.5,\omega_2=0.3$,那么犹豫度 $\omega_3=0.2$。精度 β 和程度 k 往往会根据需求而自行选择,所以本文设置 $\beta=0.3,k=1$。通过定义 1 计算得到的加权得分如表 2 所列。

表 2 加权得分表

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	0.03	−0.04	0.34	0.03	0.28
x_2	−0.04	0.03	0.21	0.03	0.26
x_3	−0.04	−0.21	0.35	0.03	0.26
x_4	−0.21	−0.21	0.03	−0.21	0.34
x_5	0.26	0.03	0.42	0.02	0.35
x_6	−0.05	0.02	0.27	0.1	0.34
x_7	0.03	0.03	0.34	0.03	0.34
x_8	0.02	0.03	0.42	0.26	0.34
x_9	0.02	0.26	0.42	0.03	0.43
x_{10}	0.26	0.26	0.34	0.43	0.03
x_{11}	−0.05	0.18	0.11	0.11	0.15
x_{12}	0.02	0.11	0.34	0.29	0.28
x_{13}	−0.13	0.34	−0.05	0.18	0.04
x_{14}	−0.14	0.34	−0.05	−0.05	−0.05
x_{15}	0.02	0.11	0.27	−0.06	0.29
x_{16}	0.03	0.18	0.18	0.12	0.15
x_{17}	0.18	−0.05	0.02	0.11	0.18
x_{18}	0.18	−0.05	0.11	0.27	0.13
x_{19}	0.34	−0.14	−0.05	0.11	0.21
x_{20}	0.34	−0.14	0.02	0.21	−0.06

运用表 2 的加权得分和定义 2 可以计算论域 U 中所有对象的优势类,如表 3 所列。

(下转第 225 页)

2005,34(5):517-522. (in Chinese)
王芳，邱玉辉. 一种引入单纯形法算子的新颖粒子群算法[J]. 信息与控制，2005,34(5):517-522.

[16] CHEN X, ZHOU Y Q. Hybrid Algorithm Based on Monkey Algorithm and Simple Method[J]. Computer Science, 2013, 40(11):248-254. (in Chinese)
陈信，周永权. 基于猴群算法和单纯法的混合优化算法[J]. 计算机科学，2013,40(11):248-254.

[17] AMGED S, EL-WAKEEL. Design optimization of PM couplings using hybrid Particle Swarm Optimization-Simplex Method (PSO-SM) Algorithm [J]. Electric Power Systems Research, 2014,116:29-35.

[18] REN X K, HAO R Z, SUN Z X, et al. Quantum Behaved Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Simplex Method [J]. Microelectronics & Computer, 2010, 27(1): 154-157. (in Chinese)
任小康，郝瑞芝，孙正兴，等. 基于单纯形法的量子粒子群优化算法[J]. 微电子学与计算机，2010,27(1):154-157.

[19] YANG X S. Flower pollination Algorithm for Global optimization [M]//Unconventional Computation and Natural Computation. 2012:240-249.

[20] YANG X S, DEB S. Cuckoo search via Lévy flights[C]//World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing, 2009 (NaBIC 2009). IEEE, 2009:210-214.

[21] YANG X S. A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm [J]. Science, 2010, 284:65-74.

(上接第 210 页)

表 3　论域 U 中所有对象的优势类

U	x 的优势类	U	x 的优势类
x_1	x_1, x_7	x_{11}	x_{11}, x_{16}
x_2	$x_2, x_7, x_8, x_9, x_{12}$	x_{12}	x_{12}
x_3	x_3, x_8, x_9	x_{13}	x_{13}
x_4	$x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$	x_{14}	x_{13}, x_{14}
x_5	x_5	x_{15}	x_9, x_{15}
x_6	x_6, x_8	x_{16}	x_{16}
x_7	x_7	x_{17}	x_{17}
x_8	x_8	x_{18}	x_{18}
x_9	x_9	x_{19}	x_{19}
x_{10}	x_{10}	x_{20}	x_{20}

随机抽取一部分对象集 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_{12}, x_{14}, x_{17}, x_{19}\}$作为研究对象，$X$ 的上、下近似分别为：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X)=\{x_1, x_2, x_5, x_7, x_8, x_{12}, x_{17}, x_{19}\}$$

进而，X 的正域、负域、上边界域、下边界域和边界域分别为：

$$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\{x_1, x_2\}$$

$$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\{x_6, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{18}, x_{20}\}$$

$$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\{x_3, x_4\}$$

$$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\{x_5, x_7, x_8, x_{12}, x_{17}, x_{19}\}$$

$$bnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}(X)=\{x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{12}, x_{17}, x_{19}\}$$

结束语　本文引入加权得分函数并定义了一种新的排序规则，基于此排序规则定义了该排序规则下的直觉模糊序信息系统，通过“逻辑且”的方式把该序信息系统下的变精度粗糙集与程度粗糙集联合起来，使信息系统的量化更加精确。最后，通过董事会主席选举的实例对本文提出的定义与定理进行分析。文中工作有助于减小实际工程应用中因信息量化不全而导致的误差，从而提高信息量化的精度。

参 考 文 献

[1] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001.

[2] 杨善林，倪志伟. 机器学习与智能决策支持系统[M]. 北京：科学出版社，2004.

[3] PAWLAK Z. Rough Sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5):341-356.

[4] LIU W J, GUO Q. An Attribute Discretization Algorithm Based on Rough Sets and Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2001, 25(3):147-153. (in Chinese)
刘文军，郭庆. 基于粗糙集与模糊集的连续值域决策表的离散化算法[J]. 模糊系统与数学，2001,25(3):147-153.

[5] YANG X B, YU D J. Dominance-based rough set approach to incomplete interval-valued information system [J]. Data and Knowledge Engineering, 2009, 68(11):1331-1347.

[6] ZHANG Z M. A rough set approach to intuitionistic fuzzy soft set based decision making [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(10):4605-4633.

[7] YEE L, MANFRED M F, WU W Z, et al. A rough set approach for the discovery of classification rules in interval-valued information systems [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 47(1):233-246.

[8] HU J H, CHEN X H. Multi-criteria decision making method based on dominance relation and variable precision rough set [J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(4): 759-763. (in Chinese)
胡军华，陈晓红. 基于优势关系和可变精度粗糙集的多准则决策方法[J]. 系统工程与电子技术，2010,32(4):759-763.

[9] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation by dominance relations [J]. International Journal of Intelligence Systems, 2002, 17(2):153-171.

[10] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough sets theory for multi-criteria decision analysis [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1):1-47.

[11] LUO G Z, YANG X J. Rough analysis model of multi-attribute decision making based on limited similarity dominance relation [J]. System Engineering: Theory and Practice, 2009, 29(9):134-140.

[12] LUO G Z, YANG X B, YANG X J. Limited dominance - based rough fuzzy set and knowledge reductions [J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(8):1657-1661. (in Chinese)
骆公志，杨习贝，杨晓江. 基于限制优势关系的粗糙模糊集及知识约简[J]. 系统工程与电子技术，2010,32(8):1657-1661.

[13] ATANASSOV K. Fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87-96.