序信息系统下基于精度与程度“逻辑与”和“逻辑或”的粗糙集

余建航 徐伟华
(重庆理工大学数学与统计学院 重庆 400054)

摘 要 在序信息系统中通过“逻辑与”和“逻辑或”将变精度粗糙集与程度粗糙集融合起来，建立了一种新的粗糙集模型，此模型是对经典粗糙集模型、变精度粗糙集模型以及程度粗糙集模型的推广。对模型区域做出了精确的刻画，深入地研究了模型的数学性质。最后通过对学生成绩这一案例的分析，揭示了本研究的意义，从而为序信息系统的知识发现提供了新的思路。

关键词 程度粗糙集，逻辑与，逻辑或，序信息系统，变精度粗糙集

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.2.056

Rough Set Model Based on Logical And Operator and Logical Disjunct Operator of Variable Precision and Grade in Ordered Information System

YU Jian-hang XU Wei-hua
(School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract In this paper, the rough set model based on logical and operator and logical disjunct operator of variable precision and graded was proposed in ordered information system. The new model is an expansion of the classical rough set, variable precision rough set and graded rough set model. The accurate description of this model was discussed and some important properties of this model were investigated carefully. Moreover, a specific case study about the student achievement was analyzed. This study provides a new way for the knowledge discovery in ordered information system.

Keywords Graded rough set, Logical and operator operation, Logical disjunct operator operation, Ordered information system, Variable precision rough set

1 引言

粗糙集理论由波兰数学家 Pawlak[2] 于 1982 年提出，是一种处理模糊和不确定知识的新型工具，该理论将人的智能体现在对事物、行为、感知等的分类能力上。近年来随着研究的不断深入，它已在机器学习、决策分析、模式识别与数据挖掘等领域取得了丰硕的成果。经典的粗糙集是基于等价类和概念之间的严格包含关系而定义的，而实际应用中往往会根据类与概念集合重叠的程度或者重叠的元素个数来刻画近似概念而非传统的包含关系。为此，学者们提出了变精度粗糙集和程度粗糙集这两个重要的拓展粗糙集模型，研究还发现这两个模型实质上分别是从信息的相对量化和绝对量化两个方面对经典粗糙集模型进行了扩张[13]。近年在同一个模型中同时研究信息的相对量化和绝对量化也已经取得了丰硕的成果[3,11,12,14]，与此同时经典粗糙集理论中要求的不可区分关系也过于苛刻，实际应用中往往会用到优势关系[1]，那么在序信息系统中将变精度粗糙集和程度粗糙集结合起来就显得有意义了，笔者在序信息系统下结合相对量化信息和绝对量化信息也做了一部分工作[6,7]。而本文正是在这些工作的基础上，通过“逻辑与”和“逻辑或”将精度与程度组合起来，得到的新模型能够同时对信息进行相对量化和绝对量化。对新模型的各个区域做了精确的描述，深入研究了其数学性质；最后通过案例分析体现了其应用价值。

2 粗糙集基本理论

这一部分主要介绍变精度粗糙集$(U,\overline{R_\beta},\underline{R_\beta})$、程度粗糙集$(U,\overline{R_k},\underline{R_k})$以及序信息系统 $S^{\geqslant}=(U,A,V,F)$的相关知识，为建立新的模型$(U,\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}},\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}})$提供理论基础。

2.1 变精度粗糙集[9,10]

设(U,R)为近似空间，任意的 $X\subseteq U$，$c([x]_R,X)=1-|[x]_R\cap X|/|[x]_R|$称为等价类$[x]_R$关于集合 X 的错误分类率；设 β 为 0 到 1 的实数，称为可调错误分类水平；$1-\beta$ 称为精度。则集合：

$$\overline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R\mid c([x]_R,X)<1-\beta\}$$

$$\underline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R\mid c([x]_R,X)\leqslant\beta\}$$

分别称为 X 的精度为 $1-\beta$ 的 R 上、下近似集。若$\overline{R_\beta}X\neq\underline{R_\beta}X$，则称 X 在精度 $1-\beta$ 下是 R 粗糙的，否则称 X 是 R 精确

到稿日期：2015-03-31 返修日期：2015-07-31 本文受国家自然科学基金(61472463，61402064)，重庆市自然科学基金资助项目(cstc2013jcyjA40051)，重庆理工大学研究生创新基金(YCX2014236)，重庆市研究生创新基金(CYS15223)资助。

余建航(1991—)，男，硕士生，主要研究方向为人工智能的数学基础，E-mail：yujh2013@foxmail.com；**徐伟华**(1979—)，男，博士，教授，主要研究方向为粒计算、粗糙集理论与应用、不确定性推理，E-mail：chxuwh@gmail.com。

的。参数β的取值范围一般在$(0,0.5]$，也可以将参数β的取值范围限定在$(0.5,1]$，为了更具一般性，本文将参数β限定在$[0,1]$上。研究发现$\beta\in(0.5,1]$和$\beta\in(0,0.5]$两种情况具有很强的对称性，因此一般情况下只需研究其中一部分，而另一部分可以类似地得到。

2.2 程度粗糙集[4,8,10]

设(U,R)为近似空间$X\subseteq U$；k为自然数，称为程度。集合：

$$\overline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R\mid|[x]_R\cap X|>k\}$$

$$\underline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R\mid|[x]_R|-|[x]_R\cap X|\leqslant k\}$$

分别称为X的程度为k的R上、下近似集，若$\overline{R_k}X\neq\underline{R_k}X$，称$X$在程度$k$时是$R$粗糙的，否则称为是$R$精确的。其中$\overline{R_k}X$是“属于$X$的元素个数多于$k$个等价类”的并集，$\underline{R_k}X$是“最多只有$k$个元素不属于$X$的等价类”的集合。

2.3 序信息系统[1,5]

设$S=(U,A,V,F)$为信息系统，其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为非空有限对象集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为属性集，$F=\{f\mid U\rightarrow V_{a_i},a_i\in A\}$是$U$与$A$之间的关系集，$V_a$为$a$的有限值域。对给定信息系统$S$，如果属性$a\in A$的值域上有偏序关系“$\geqslant_a$”，则称$a$为一个准则。$\forall x,y\in U,x\geqslant_a y$表示$x$至少和$y$在准则$a$下是一样好的，$x\geqslant_a y\Leftrightarrow f(x,a)\geqslant_a f(y,a)$。对于属性集$B\subseteq A,x\geqslant_B y$表示$x$关于$B$中的所有准则都优于$y$，当信息系统$S$中所有的属性都为准则时，则该信息系统为一个序信息系统，通常简记为$S^{\geqslant}=(U,A,f)$。

3 序信息系统下基于精度与程度“逻辑与”和“逻辑或”的粗糙集模型

本节在序信息系统中将变精度粗糙集与程度粗糙集通过“逻辑与”和“逻辑或”结合起来建立一个新的模型，以“逻辑与”上近似作为新模型的上近似、“逻辑或”下近似作为新模型的下近似建立一种新的模型，并简要讨论了该模型所具有的一些基本的性质。

定义1 设$S^{\geqslant}=(U,A,f)$为序信息系统，对$\forall X\subseteq U$，$R^{\geqslant}$为$S^{\geqslant}$上的优势关系，记：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid c([x]_R^{\geqslant},X)<1-\beta,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>k\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid c([x]_R^{\geqslant},X)\leqslant\beta\text{ 或 }|[x]_R^{\geqslant}|-|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\}$$

分别为X在序信息系统下精度为$1-\beta$、程度为k的基于“逻辑与”和“逻辑或”的上近似集、下近似集，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}$、$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}$为对应的上、下近似算子。类似地，若$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$，则是精确的，反之则是是粗糙的。

其中：

$$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$$

$$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=\sim(\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cup\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X)$$

$$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X-\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$$

$$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X-\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$$

$$bnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=\overline{UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cup\overline{LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$$

分别称为正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

定理1 设$S^{\geqslant}=(U,A,f)$为序信息系统，对$\forall X\subseteq U$，$\beta\in[0,1],k\in N,R^{\geqslant}$为$S^{\geqslant}$上的优势关系，有：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\cup\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\cup\underline{R^{\geqslant}_{k}}X$$

证明：根据定义易证。

定理2 设$S^{\geqslant}=(U,A,f)$为序信息系统，对$\forall X\subseteq U$，$\beta\in[0,1],k\in N,R^{\geqslant}$为$S^{\geqslant}$上的优势关系，有：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X\cup UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X\cup LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X$$

证明：由定义可以直接得到。

定理3 设$S^{\geqslant}=(U,A,f)$为序信息系统，对$\forall X\subseteq U$，$\beta\in[0,1],k\in K,R^{\geqslant}$为$S^{\geqslant}$上的优势关系，则有如下性质成立：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>\max(k,\beta|[x]_R^{\geqslant}|)\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\geqslant\min(|[x]_R^{\geqslant}|-k,|[x]_R^{\geqslant}|-\beta|[x]_R^{\geqslant}|)\}$$

证明：由上近似定义可知：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid c([x]_R^{\geqslant},X)<1-\beta$，且$|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>k\}$。由$c([x]_R^{\geqslant},X)=1-|[x]_R^{\geqslant}\cap X|/|[x]_R^{\geqslant}|<1-\beta$，有$-|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<-\beta|[x]_R^{\geqslant}|$，则$|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>\beta|[x]_R^{\geqslant}|$。

故$|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>\max(k,\beta|[x]_R^{\geqslant}|)$。

下近似的部分同理可得。

定理4 设$S^{\geqslant}=(U,A,f)$为序信息系统，对$\forall X\subseteq U$，$k\in N,R^{\geqslant}$为$S^{\geqslant}$上的优势关系，则有下列结论成立：

(1)当$0<\beta<0.5$且$k\neq0$时，有：$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|>2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k\leqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\geqslant(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})$；$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|>2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k\leqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})$；$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|>2k,k<|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k\leqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|,\beta|[x]_R^{\geqslant}|<|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})$；$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant2k,|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\}$。

(2)当$0.5\leqslant\beta<1$且$k\neq0$时，有：$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|>2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})$；$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|>2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant2k,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})$；$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|>2k,k<|[x]_R^{\geqslant}\cap X|<|[x]_R^{\geqslant}|-k\})$；$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k>\beta|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant2k,|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid k\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})$。

证明：如果$0<\beta<0.5$且$k\neq0$，那么：

(1)当$k<\beta|[x]_R^{\geqslant}|$时，有$[x]_R^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geqslant}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$和$[x]_R^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geqslant}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$，又因为$\beta<1-\beta$，那么

$c([x]^{\geqslant}_{R},X)\leqslant\beta$ 即是 $c([x]^{\geqslant}_{R},X)<1-\beta$，故 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$，所以 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$，有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\Rightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq posR_{\wedge\vee}X$。

(2)当 $k\geqslant\beta|[x]^{\geqslant}_{R}|$ 时，有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$ 和 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}X$。

a)如果 $|[x]^{\geqslant}_{R}|>2k$，则 $|[x]^{\geqslant}_{R}|-k>k$，有 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\Rightarrow|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|>k$；又因为 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}X\Rightarrow|[x]^{\geqslant}_{R}|\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$，当 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|-k$ 时，有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}X$，$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X$。

b)如果 $|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant 2k$，那么 $|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\leqslant k$，有 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|>k\Rightarrow|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant|[x]^{\geqslant}_{R}|-k$；又因为 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}X\Rightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}X$，当 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant k$ 时，$[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}X$，$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X$。

其他对应的区域以及当 $0.5\leqslant\beta<1$ 且 $k\neq 0$ 时可以类似地得到。

定理 5 设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X,Y\subseteq U$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，$k,l\in N$，有下列结论成立：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\varnothing=\varnothing$，$\underline{R^{\geqslant}_{\wedge\vee k}}U=U$。

当 $\beta=1$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}U=\varnothing$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\varnothing=U$；

当 $\beta\neq 1$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}U=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|>k\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\varnothing=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k\}$。

(2)若 $X\subseteq Y$，则 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}Y$ 且 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}Y$。

(3) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(X\cup Y)\supseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cup\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}Y$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(X\cup Y)=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}Y$。

(4) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(X\cap Y)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cap\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}Y$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(X\cap Y)\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}Y$。

(5)若 $\beta\geqslant\alpha,k\geqslant l$，有：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee l}}X$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee k}}X$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee l}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee l}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee k}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee l}}X$。

(6) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\sim X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X$。

证明：(1)－(5)易证，以下证明(6)。

由定义可知：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid c([x]^{\geqslant}_{R},X)<1-\beta,|[x]^{\geqslant}_{R}|\cap X>k\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid c([x],X)\leqslant\beta$ 或 $|[x]^{\geqslant}_{R}|-|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X\leqslant k\}$。

因为 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(\sim X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(\sim X)=(\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X)\cap(\sim\underline{R^{\geqslant}_{k}}X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$。

同理可以得到：$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$。

4 案例分析

设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 是一个序信息系统，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}\}$ 为论域，代表某班的 20 个学生；$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 分别代表语文、数学、英语和综合科目；集合$\{3,2,1\}$表示成绩，其中"3"表示"优秀"，"2"表示"一般"，"1"表示"不合格"。统计数据如表 1 所列。

首先计算优势关系下的对象分类。不妨选取精度 $\beta=0.3$、程度 $k=1$，并且随机抽取一部分学生为研究对象，记为：$X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{17},x_{19},x_{20}\}$，那么可以得到相应的 $|[x_i]^{\geqslant}_{A}|$、$|[x_i]^{\geqslant}_{A}\cap X|$ 以及 $c([x_i]^{\geqslant}_{A},X)$ 和 $|[x_i]^{\geqslant}_{A}|-|[x_i]^{\geqslant}_{A}\cap X|$，如表 2 所列。

表 1 学生成绩统计数据

U	语文	数学	外语	综合
x_1	3	3	2	3
x_2	3	3	2	2
x_3	1	2	1	2
x_4	2	1	2	2
x_5	2	2	2	2
x_6	2	2	3	3
x_7	3	2	3	1
x_8	1	1	1	2
x_9	2	3	3	3
x_{10}	2	3	1	2
x_{11}	3	1	3	3
x_{12}	1	2	1	1
x_{13}	2	2	2	1
x_{14}	1	2	2	1
x_{15}	1	2	2	2
x_{16}	3	1	2	2
x_{17}	3	3	1	1
x_{18}	3	3	2	1
x_{19}	2	1	1	1
x_{20}	1	3	3	1

表 2 学生成绩优势类的计算数据

x_i	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_{A}\rvert$	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_{A}\cap X\rvert$	$c([x_i]^{\geqslant}_{A},X)$	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_{A}\rvert-\lvert[x_i]^{\geqslant}_{A}\cap X\rvert$
1	1	0	1	1
2	2	0	1	2
3	8	1	7/8	7
4	8	2	3/4	6
5	5	1	4/5	4
6	2	1	1/2	1
7	1	1	0	0
8	12	2	5/6	10
9	1	1	0	0
10	4	1	3/4	3
11	1	1	0	0
12	15	4	11/15	11
13	8	2	3/4	6
14	11	3	8/11	8
15	6	1	5/6	5
16	4	1	3/4	3
17	4	1	3/4	3
18	3	0	1	3
19	14	5	9/14	9
20	2	2	0	0

方法 1 由定理 1 求解：

(1)当 $\beta=0.3$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{19},x_{20}\}$；当 $k=1$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{k}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$，$\overline{R^{\geqslant}_{k}}X=\{x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19},x_{20}\}$。

(2)利用(1)所求结果以及定理 1 可以得到：

$\overline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}}X=\{x_{19},x_{20}\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$。

(3)根据定义 1，利用(2)所求结果，通过集合运算得到：

$negR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_8,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$，$posR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_{20}\}$，$LbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11}\}$，$UbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_{19}\}$，$bnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{19}\}$。

方法 2 由定理 4 求解：

由 $\beta=0.3,k=1$ 可以得到 $k/\beta=10/3$，$k/(1-\beta)=10/7$，计算结果如表 3 所列。

(1)由表 3 计算结果可以得到：

$negR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_8,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$，$posR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_{20}\}$，$LbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11}\}$，$UbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_{19}\}$，$bnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{19}\}$。

(2)利用(1)所求结果及定理 2 可以计算得到：

$\overline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}}X=\{x_{19},x_{20}\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee 1}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$。

表 3 优势类的分布情况及区域归属

比较：$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	比较：$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	比较：$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\cap X\rvert$	x_i 优势类分布	归属区域	比较次数	变量个数
$<\frac{k}{\beta}$	$>2k$	$\geqslant\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert-k$	Null	Pos	4	1
$<\frac{k}{\beta}$	$\leqslant 2k$	$>k$	20	Pos	3	0
$<\frac{k}{\beta}$	$>2k$	$\leqslant k$	18	Neg	3	0
$<\frac{k}{\beta}$	$\leqslant 2k$	$<\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert-k$	2	Neg	4	1
$<\frac{k}{\beta}$	$>2k$	$(k,\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert-k)$	Null	Ubn	4	1
$<\frac{k}{\beta}$	$\leqslant 2k$	$[\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert-k,k]$	1,6,7,9,11	Lbn	4	1
$\geqslant\frac{k}{\beta}$	Null	$\geqslant(1-\beta)\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	Null	Pos	3	2
$\geqslant\frac{k}{\beta}$	Null	$\leqslant\beta\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	3,4,5,8,10,12,13,14,15,16,17	Neg	2	1
$\geqslant\frac{k}{\beta}$	Null	$(\beta\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert,(1-\beta)\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert)$	19	Ubn	3	2

两种方法所求结果是一致的，但是其求解过程中的时间和空间复杂性却不一样，利用定理 1 求解的时间复杂性$T_1=80$，空间复杂性 $S_1=40$；而利用定理 4 求解的时间复杂性 $T_2=54$，空间复杂性 $S_2=19$。该例说明当有大量的数据需要处理时，选择定理 4 这一方案求解，在保持实验结果不变的情况下，在计算时间和存储空间上具有明显的优势。

结束语 本文在序信息系统中通过"逻辑与"和"逻辑或"将变精度粗糙集与程度粗糙集融合起来，建立了一种新的粗糙集模型，而后深入研究了模型的数学性质。最后通过两种方法对学生成绩这一现实例子进行了分析，通过对方法的比较可以知道，正是通过本文的工作对粗糙集区域进行了更精确的刻画，使得在实际工程应用中能从时间和空间两方面来简化求解。

参 考 文 献

[1] Dembczyński K, PindurR, Susmaga R. Dominance-based rough set classifier without induction of decision rules[J]. Electronic Notes Theory Computer Science, 2003, 82: 84-95

[2] Pawlak Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

[3] Shen Jin-biao, Lv Yue-jin. Promotion for rough set of variable precision and extent of rough set[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(36): 45-47(in Chinese)
申锦标，吕跃进. 变精度与程度粗糙集的一种推广[J]. 计算机工程与应用，2008，44(36)：45-47

[4] Xu Wei-hua, Liu Shi-hu, Wang Qiao-rong. The First Type of Grade Rough Set Based on Rough Membership Function[C]// 2010 Seventh International Conference System and Knowledge Discovery(FSKD2010). 1922-1926

[5] Xu Wei-hua. Ordered Information Systems and Rough Set[M]. Beijing: Science Press, 2013(in Chinese)
徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京：科学出版社，2013

[6] Yu Jian-hang, Xu Wei-hua. The rough set based on logical conjunction operation of variable precision and grade in ordered information system[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2015, 29(4): 146-152(in Chinese)
余建航，徐伟华. 序信息系统下基于精度与程度的"逻辑与"的粗糙集[J]. 模糊系统与数学，2015，29(4)：146-152

[7] Yu Jian-hang, Xu Wei-hua. The rough set based on logical disjunct operation of precision and grade in ordered information system[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(1): 112-118(in Chinese)
余建航，徐伟华. 序信息系统下变精度与程度的"逻辑或"粗糙集[J]. 计算机科学与探索，2015，9(1)：112-118

[8] Yao Y Y, Lin T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automatic and Soft Computing, 1996, 2: 103-120

[9] Ziarko W. Variable precision rough set model [J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59

[10] Zhang Wen-xiu, Wu Wei-zhi, Liang Ji-ye, et al. Rough set theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2001(in Chinese)
张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001

[11] Zhang Xian-yong, Xiong Fang, Mo Zhi-wen. Rough Set Model Based on Logical OR Operation of Precision and Grade[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2009, 17(9): 151-155(in Chinese)
张贤勇，熊方，莫志文. 精度与程度的逻辑或粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能，2009，17(9)：151-155

[12] Zhang Xian-yong, Xiong Fang, Mo Zhi-wen. Properties of Approximation Operators of Logical Difference Operation of Grade and Precision[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2011, 18(41): 209-213

[13] Zhang Xian-yong, Mo Zhi-wen, Xiong Fang, et al. Comparative study of variable precision rough set model and graded rough set model [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53: 104-116

[14] Zhang Xian-yong, Miao Duo-qian. Two basic double-quantitative rough set models of precision and grade and their investigation using granular computing[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54: 1130-1148

(上接第 268 页)

[12] Laura B, Ioannis T, Constantin A. A Comparison of Novel and State-of-the-Art Polynomial Bayesian Network Learning Algorithm[C]//Proceedings of the 20th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI). AAAI Press, 2005: 739-745

[13] David M C, Christopher M. Monotone DAG faithfulness: A bad assumption [R]. Microsoft, 2003

[14] Shunkai F, Michel C D, Sein M, et al. A survey on advances in Markov blanket induction algorithms[C]//Proceedings of the 10th ICNC-FSKD. Xiamen, China, 2014

[15] Shunkai F, Michel C D. Tradeoff analysis of different Markov blanket local learning approaches[C]//Proceedings of the 12th Pacific-Asia Conference on Advances in Knowledge Discovery and Data Mining (PAKDD). Osaka, Japan: Springer, 2008: 562-571

[16] Facundo B, Dimitris M, Vsant H. Efficient Markov network structure discovery using independence tests [J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2009, 35(1): 449-484